Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Asie 8 juin 2021 Jour 2 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. $$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^x.$$

On a $f(x) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$.

- On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, puis que
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Réponse C.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^x}$.

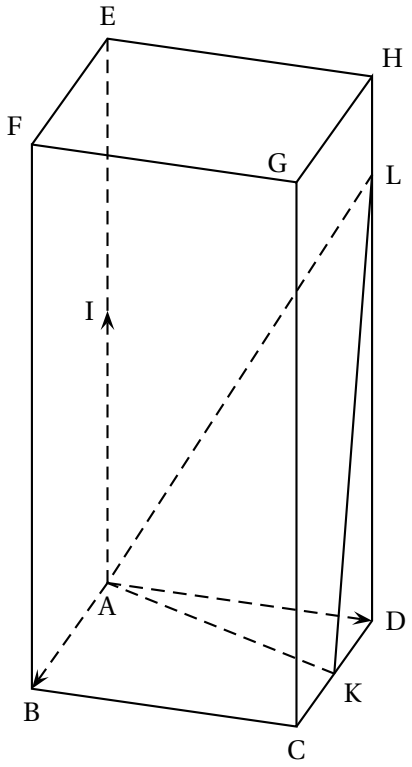
- On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini ;
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Réponse C.

3. On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion. Réponse B.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.
$n^2-17n+20 = \left(n-\frac{17}{2}\right)^2-\left(\frac{17}{2}\right)^2+20 = \left(n-\frac{17}{2}\right)^2-\frac{289}{4}+\frac{80}{4} = \left(n-\frac{17}{2}\right)^2-\frac{209}{4} = \left(n-\frac{17-\sqrt{209}}{2}\right)\left(n-\frac{17+\sqrt{209}}{2}\right)$.
On a donc quel que soit n, $u_n \geqslant -\frac{209}{4}$: la suite est donc minorée. Réponse A.

5. Aucune réponse!
On démontre aisément que la suite est majorée par 20 par récurrence :
Initialisation : $u_0 = 2 \leqslant 20$: la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2$ alors par produit par 0,75 :
$0,75u_n \leqslant 0,75 \times 20$ ou encore $0,75u_n \leqslant 15$ puis par somme de 5 :
$0,75u_n + 5 \leqslant 15 + 5$, soit finalement $u_{n+1} \leqslant 20$.
La suite étant majorée par 20 aucune des solutions proposées n'est correcte.
En fait cet algorithme tourne indéfiniment.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats



1. Avec C(1 ; 1 ; 0) et D(0 ; 1 ; 0), on obtient K$\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$, donc $\overrightarrow{\text{AK}}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$ et on a $\overrightarrow{\text{AL}}\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

2. **a.** ✦ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AK}} = 3-3+0 = 0$;

✦ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AL}} = 0-3+3 = 0$: le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan ; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AKL}) \iff \overrightarrow{\text{A}M}\cdot\vec{n} = 0 \iff 6x-3y+2z+d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0+0+0+d = 0$.

Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AKL}) \iff 6x-3y+2z = 0$.

c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\vec{n}$, donc :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \Delta \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\text{D}M} = t\,\vec{n} \iff \begin{cases} x &= 6t \\ y-1 &= -3t \\ z &= 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1-3t \\ z &= 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ, donc ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1-3t \\ z &= 2t \\ 6x-3y+2z = 0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6\times 6t + (-3)\times(1-3t) + 2\times 2t = 0 \iff$$

$36t-3+9t+4t=0 \iff 49t=3 \iff t=\dfrac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$$\begin{cases} x &= 6\times\dfrac{3}{49} \\ y &= 1-3\times\dfrac{3}{49} \\ z &= 2\times\dfrac{3}{49} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{18}{49} \\ y &= \dfrac{40}{49} \\ z &= \dfrac{6}{49} \end{cases}$$

. Conclusion : $\text{N}\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{40}{49}\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$.

3. **a.** Le triangle ADK est rectangle en D ; on a par définition AD = 1 et DK = $\frac{1}{2}$.

Donc $\mathcal{A}(\text{ADK}) = \dfrac{\text{AD}\times\text{DK}}{2} = \frac{1}{4}$.

D'autre part DL = $\frac{3}{2}$, donc

$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{8}$.

b. On a $\overrightarrow{\text{DN}}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{40}{49}-1\,;\,\dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{\text{DN}}\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{-9}{49}\,;\,\frac{6}{49}\right)$, donc :

$\text{DN}^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{-9}{49}\right)^2+\left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2+9^2+6^2}{49^2} = \frac{324+81+36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2$.

Donc $\text{DN} = \dfrac{21}{49} = \dfrac{3}{7}$.

c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \dfrac{\mathcal{A}(\text{AKL})\times\text{DN}}{3}$, soit $\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathcal{A}(\text{AKL})\times\frac{3}{7}}{3}$, d'où

$\mathcal{A}(\text{AKL}) = 7\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ (u. a.).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Il y a $\text{C}_9^3 = \dfrac{9!}{3!\times(9-3)!} = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2}3\times4\times7 = 84$ façons différentes de choisir 3 cases différentes parmi 9.

2. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales donc 8 combinaisons gagnantes.

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{8}{84} = \dfrac{4\times2}{4\times21} = \dfrac{2}{21}$.

3. Soit X la variable aléatoire égale au montant algébrique de la somme gagnée.

On a $P(X=4) = \dfrac{2}{21}$ et $P(X=-1) = \dfrac{19}{21}$.

On a donc $E(X) = 4\times\dfrac{2}{21}+(-1)\times\dfrac{19}{21} = \dfrac{8-19}{21} = -\dfrac{11}{21} \approx -0,524$.

En moyenne sur un grand nombre de parties un joueur perd 58 centimes d'euro par partie. Le jeu est défavorable au joueur.

4. **a.** La variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{2}{21}$.

b. On a $p(X=5) = \binom{20}{5}\times\left(\dfrac{2}{21}\right)^5\times\left(\dfrac{19}{21}\right)^{20-5} \approx 0,0271$, soit 0,027 à 10^{-3} près.

c. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{2}{21}\right)^0 \times \left(\dfrac{19}{21}\right)^{20} \approx (1 - 0{,}1351) \approx 0{,}8649$ soit 0,865 à 10^{-3} près.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– Suites
– Équations différentielles

Partie I : modèle discret

1. On a pour $n = 0$, $u_1 = u_0 + 0{,}05(20 - u_0) = 1 + 0{,}05 \times 19 = 1 + 0{,}95 = 1{,}95$.

2. **a.** Pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) = u_n + 1 - 0{,}05u_n = u_n(1 - 0{,}05) + 1 = 0{,}95u_n + 1$.

b. Pour tout naturel n, $v_{n+1} = 20 - u_{n+1} = 20 - (0{,}95u_n + 1) = 20 - 0{,}95u_n - 1 = 19 - 0{,}95u_n = 0{,}95 \times 20 - 0{,}95u_n = 0{,}95(20 - u_n) = 0{,}95v_n$.
Conclusion : pour tout naturel n, $v_{n+1} = 0{,}95v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de terme initial $v_0 = 20 - u_0 = 20 - 1 = 19$ et de raison 0,95.

c. On sait que pour tout $n \in n\mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, q étant la raison, soit $v_n = 19 \times 0{,}95^n$.
Or $v_n = 20 - u_n \iff u_n = 20 - v_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.

3. On vient de démontrer que pour tout naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.
Comme $0 < 0{,}95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 20.$$

Partie II : modèle continu

$$(E) \qquad y' = 0{,}05(20 - y)$$

1. L est la somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$L'(t) = -0{,}05 \times \left(-19\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right) = 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.
Donc L est solution de (E) si :
$y' = 0{,}05(20 - y) \iff 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 0{,}05\left(20 - \left(\left(20 - 19\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right)\right)\right) \iff 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 0{,}05\left(19\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right) \iff 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05t} = 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ qui est vraie.
De plus $L(0) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 0} = 20 - 19 \times 1 = 1$.

2. **a.** ✦ $L'(0) = 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 0} = 0{,}95 \times 1 = 0{,}95$.
✦ $L'(5) = 0{,}95\mathrm{e}^{-0{,}05 \times 5} = 0{,}95 \times \mathrm{e}^{-0{,}25} \approx 0{,}74$.
Donc $L'(0) > L'(5)$.

b. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} L'(t) = 0$.
Ce résultat est bien en cohérence avec la description du modèle de croissance du bambou : celui-ci a une taille croissante ($L'(t) > 0$) de 1 m (taille initiale) à 20 m (taille finale), la dérivée donc la vitesse de croissance se rapprochant de zéro.

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Suites, étude de fonction
– Fonction logarithme

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

1. Il faut écrire dans la cellule B3 : `=B2 - ln(B2 - 1)`.

2. On peut penser que la suite est décroissante et a pour limite 2.

Partie II :

1. On a $\lim\limits_{x\to1} x-1 = 0$, donc $\lim\limits_{x\to1} \ln(x-1) = -\infty$ et enfin par somme de limites $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.
Rem. : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f.

2. **a.** Sachant que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x)$ étant une fonction de x ne s'annulant pas sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, on a donc :
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

b. Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ on a bien entendu $x > 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du dénominateur $x-2$:
✦ $x-2 > 0 \iff x > 2$: $f'(x) > 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$; la fonction f est croissante sur $]2\,;\,+\infty[$;
✦ $x-2 < 0 \iff x < 2$: $f'(x) > 0$ sur $]1\,;\,2[$; la fonction f est décroissante sur $]1\,;\,2[$;
✦ $x-2 = 0 \iff x = 2 : f'(2) = 0$ la fonction f a un minimum $f(2) = 2-\ln 1 = 2-0 = 2$ sur $]1\,;\,+\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

c. La question précédente a montré que $f(2) = 2$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
On a donc pour tout $x \geqslant 2,\ f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. *Initialisation* : on a $u_0 = 10 \geqslant 2$: la proposition est vraie au rang 0.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n \geqslant 2$.
Par croissance de la fonction f, on a donc $f(u_n) \geqslant f(2)$, c'est-à-dire :
$u_{n+1} \geqslant 2$: la proposition est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence la proposition :
« $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n » est vraie.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n = -\ln(u_n - 1)$.
Or d'après la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$, donc $u_n - 1 \geqslant 2 - 1$, ou $u_n - 1 \geqslant 1$, donc $\ln(u_n - 1) \geqslant 0$ et enfin $-\ln(u_n - 1) \leqslant 0$.
Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou $_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3. On a donc démontré dans les deux questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 : elle converge donc vers une limite ℓ, telle $\ell \geqslant 2$.

4. $f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell - 1) = \ell \iff 0 = \ln(\ell - 1) \iff 1 = \ell - 1$ (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où $2 = \ell$.
La suite (u_n) converge vers le nombre 2.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.