Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Spécialité mathématiques (Asie 1) - BAC 2021

Exercice 1

1) $u_1 = 0,9\,u_0 + 250$

$\boxed{u_1 = 1150}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

A l'année $2020+n$, on note u_n le nombre d'abonnés.

L'année suivante 10 % des abonnés arrêtent de suivre le profil donc il en reste 90 % soit $0,9\,u_n$.

De plus, à ces abonnés restant s'ajoutent 250 nouveaux.

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,9\,u_n + 250}$

3) suite(10) renvoie 1977

Ainsi avec ce modèle, $\boxed{\text{le nombre d'abonnés en 2030 serait de 1977}}$.

4) a) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: " $u_n \leqslant 2500$ "

Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

$u_0 = 1000 \leqslant 2500$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé). On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$u_n \leqslant 2500$

$\Leftrightarrow\ 0,9\,u_n \leqslant 2250 \quad (0,9 > 0)$

$\Leftrightarrow\ u_{n+1} \leqslant 2500$

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n entier naturel par principe de récurrence simple et on a :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2500}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} - u_n = 0,9\,u_n + 250 - u_n$

$= -0,1\,u_n + 250$.

Or d'après (4a), on sait que :

$u_n \leqslant 2500$

donc $-0,1\,u_n \geqslant -250$

donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$

c) (u_n) est croissante et majorée par 2500 donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge vers une limite } l \in \mathbb{R}}$.

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2500$

$= 0,9\,u_n + 250 - 2500$

$= 0,9\,u_n - 2250$

$= 0,9\,(u_n - 2500)$

$= 0,9\,v_n$

$\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 0,9 \text{ et de premier terme : } v_0 = u_0 - 2500 = -1500}$

b) D'après 5.a, on peut dire que :

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0{,}9^n$

ie $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1500 \times 0{,}9^n}$

De plus, on sait que pour tout n entier naturel, on a : $v_n = u_n - 2500$

d'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2500 - 1500 \times 0{,}9^n}$

c) Comme $0{,}9 \in]-1;1[$, on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2500}$

Ainsi le nombre d'abonnés de cette influenceuse ne dépassera pas les 2500.

6)
```
def abonnes ( ) :
    n = 0
    while suite (n) < 2200 : # rappel fonction q°3
        n = n+1
    return n + 2020
```

En exécutant ce script, on en conclue que le nombre d'abonnés dépassera les 2200 en 2036.

Vérification par le calcul

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n \geqslant 2200 \iff 2500 - 1500 \times 0{,}9^n \geqslant 2200$

$\iff 0{,}9^n \leqslant 1/5$ (car $1500 > 0$)

$\iff n \ln(0{,}9) \leqslant -\ln(5)$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}$)

$\iff n \geqslant -\dfrac{\ln(5)}{\ln(0{,}9)}$ (car $\ln(0{,}9) < 0$).

Or $-\dfrac{\ln(5)}{\ln(0{,}9)} \approx 15{,}3$.

C'est donc bien en 2036 que le nombre d'abonnés dépassera 2200.

Exercice 2

Partie 1

1) On a :

* $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} = \frac{3}{4} \times 8\vec{i} = 6\vec{i}$

donc $\boxed{P(6;0;0)}$

* $\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AE} = \frac{3}{4} \times 8\vec{k} = 6\vec{k}$

donc $\boxed{E(0;0;6)}$

2) On a : $\vec{PQ} = (-6;0;6)$ et $\vec{PR} = (2;2;8)$ deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (PQR).

On calcule :

* $\vec{PQ} \cdot \vec{n} = -6 \times 1 - 5 \times 0 + 6 \times 1 = 0$
* $\vec{PR} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + 2 \times (-5) + 8 \times 1 = 0$

$\vec{n}$ est donc normal au plan (PQR) (car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (PQR))

3) $\vec{n}$ étant normal à (PQR), on a l'équation cartésienne de (PQR) :

$x - 5y + 3 + d = 0 \quad (d \in \mathbb{R})$

Or on sait que $P \in (PQR)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation et on obtient $d = -6$

Ainsi une équation cartésienne de (PQR) est :

$$\boxed{x - 5y + z - 6 = 0}$$

Partie II

1) Ω est le milieu de $[EC]$ et on sait que $E(0;0;8)$ et $C(8;8;0)$.
Ainsi Ω a pour coordonnées : $\left(\frac{8+0}{2} ; \frac{0+8}{2} ; \frac{8+0}{2}\right)$

soit $\boxed{\Omega\,(4;4;4)}$

2) d est perpendiculaire au plan (PQR), donc un vecteur directeur de d est $\vec{n}(1;-5;1)$.
De plus $\Omega \in d$.
Donc une représentation paramétrique de d est :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$$

3) d étant perpendiculaire à (PQR) et L le projeté orthogonal de Ω sur (PQR), cela implique que L est le point d'intersection entre d et (PQR).
Montrons que le point de coordonnées $(14/3 ; 2/3 ; 14/3)$ correspond au point L.

* Si on pose $t = 2/3$, alors
$\begin{cases} x = 14/3 \\ y = 2/3 \\ z = 14/3 \end{cases}$
Donc $(14/3 ; 2/3 ; 14/3) \in d$

* $\frac{14}{3} - 5 \times \frac{2}{3} + \frac{14}{3} - 6 = 0$
Donc $\boxed{(14/3 ; 2/3 ; 14/3) \in (PQR)}$

Ainsi les coordonnées de L, le projeté orthogonal de Ω sur (PQR) sont : $\boxed{L(14/3 ; 2/3 ; 14/3)}$

4) La distance de Ω au plan (PQR) correspond à ΩL ie $\|\vec{\Omega L}\|$.
On a $\vec{\Omega L}(2/3 ; -10/3 ; 2/3)$
Donc $\|\vec{\Omega L}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{108/9}$
$= \sqrt{108}/3$
$\boxed{\|\vec{\Omega L}\| = 2\sqrt{3}}$

La distance de Ω au plan (PQR) est donc de $2\sqrt{3}$ cm.

Exercice 3

1) a) Le tirage étant simultanné, il y a $\binom{8}{2}$ tirages possibles, c'est à dire $\boxed{28 \text{ tirages possibles}}$

b) Il y a $\binom{6}{1} \times \binom{2}{1} = 12$ tirages gagnants.

Nous avons une situation d'équiprobabilité (boules tirées au hasard et supposées identiques)
Ainsi $\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne est de } \frac{12}{28} = \frac{3}{7}}$

2) a) Soit k un entier naturel correspondant à la mise du joueur.
Ainsi $G(\Omega) = \mathbb{Z}$.
- Si le joueur est gagnant : $\boxed{G = 10 - k}$
- Si le joueur perd : $\boxed{G = -k}$.

b) Le jeu est favorable si l'espérance de G est positive ou nulle, ie :
$E(G) > 0 \Leftrightarrow 3/7\,(10-k) + 4/7 \times (-k) > 0$
$\Leftrightarrow 30/7 > k$

Or $30/7 \approx 4,3$

Donc pour que le jeu reste favorable, le joueur ne doit pas payer plus de 4 euros

3) a) On répète 10 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante (lettres remises dans le sac) dont le succès "le joueur gagne" a pour probabilité 3/7.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès donc X suit une loi Binomiale de paramètre :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 3/7)$$

b) $P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^6$

$$P(X=4) = 0,247$$

La probabilité d'avoir 4 gagnants est de 0,247

c) $P(X \geq 5) = 1 - P(X<5)$
$= 1 - P(X=4)$

$$P(X \geq 5) = 0,753$$

La probabilité d'avoir au moins 5 vainqueurs est de 0,753.

d) A la calculatrice, on a :
$P(X \leq 5) = 0,78$
$P(X \leq 6) = 0,92$

Ainsi le plus petit entier naturel tel que $P(X \leq m) > 0,9$ est 6.

Exercice A

Partie I

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en 0 étant $f'(0)$, par lecture graphique on a $f'(0) = 0,4$

2) a) f' est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et sur $[1; +\infty[$
f' est croissante sur $[-2; -1]$

b) f est convexe sur un intervalle si pour tout x réel de cet intervalle $f''(x) > 0$.
Or f' est croissante sur $[-2; 1]$, cela implique que pour tout $x \in [-2; 1]$, $f''(x) > 0$
Ainsi **f est convexe sur $[-2; 1]$**

Partie II

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2 + x + 5/2\right)$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right)\right)$
$= \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X)$, par composition car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

De la même manière, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5/2}$$

3)

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$x^2+x+5/2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(9/4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1/2) = \ln(1/4 - 2/4 + 10/4) = \ln(9/4)$

Etude du signe du dénominateur :

$\Delta = -9 < 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 5/2 > 0$.

4) a) f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1/2 ; +\infty[$ et $f(]-1/2 ; +\infty[) =]\ln(9/4) ; +\infty[$.

Or $\ln(9/4) \approx 0,8 < 2$.

Donc $2 \in]\ln(9/4) ; +\infty[$, ainsi d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1/2 ; +\infty[$.

b) A la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1,8$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Etudions le signe de $-2x^2 - 2x + 4$.

$\Delta = 36$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-2x^2-2x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + x + 5/2)^2 > 0$, alors le signe de f'' dépend du numérateur et on a :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il y a donc deux points d'inflexion : en -2 et en 1

Exercice B

Partie 1

1) a) La fonction f_p définie sur $\mathbb{R}_+$ tel que $f_p : x \mapsto 1$ est solution particulière de l'équation différentielle.

En effet, f_p étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$f_p'(t) = 0$ et $-0,4 \times 1 + 0,4 = 0 = f_p'(t)$.

b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $\{ y : t \mapsto 1 + ke^{-0,4t} \mid k \in \mathbb{R} \}$

2) On a $g(0) = 10$ si $ke^0 + 1 = 10 \iff k + 1 = 10$

$\iff k = 9$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$

Partie II

1) On a :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} g(t) = 1}$$

car $\lim_{t \to +\infty} 1 + e^{-0,4t} = \lim_{t \to -\infty} 1 + e^{x} = 1$ (par composition)

D'où $\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x}$ (par composition)

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} p(t) = 1}$$

2) p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout t réels positifs $g(t) \neq 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad p'(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)^2}$$

$$= \frac{-9 \times (-0,4) e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad p'(t) = +\frac{3,6 e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}}$$

3) a) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ 3,6e^{-0,4t} > 0$ et $(1+9e^{-0,4t})^2 > 0$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ p'(t) > 0$

Ainsi p est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

De plus p est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions qui le sont.

On a $p(\mathbb{R}_+) = [1/10 ; 1[$

Or $1/2 \in [1/10 ; 1[$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+$

b) A la calculatrice, on a $\boxed{\alpha \approx 5,5}$

Partie III

1) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$0,4\, p(t)(1 - p(t)) = \frac{0,4}{1+9e^{-0,4t}} \left(1 - \frac{1}{1+9e^{-0,4t}}\right)$$

$$= \frac{0,4}{1+9e^{-0,4t}} \times \frac{1+9e^{-0,4t} - 1}{1+9e^{-0,4t}}$$

$$= \frac{3,6 e^{-0,4t}}{(1+9e^{-0,4t})^2}$$

$$= p'(t)$$

$\boxed{p \text{ est donc solution de l'équation différentielle}}$

2) • On a $\lim_{t \to +\infty} p(t) = 1$, cela implique que dans un grand nombre d'année, 100% des écoles des pays en voie de développement auront accès à internet.

• De plus on a $\alpha \approx 5,5$, cela signifie qu'en milieu d'année 2025, 50% des écoles aura accès à internet

• Enfin $p(0) = 1/10$ reprend le fait qu'en 2020 seulement 10% des écoles ont accès à internet.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.