Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Spécialité Mathématiques - Centres étrangers Afriques 1 - 2021 [MS]

Exercice 1 (les justifications seront données dans la corrections même si non demandées dans le sujet pour que vous compreniez vos erreurs).

1) Réponse b

Justification : f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et on a pour tout x réels :

- $f'(x) = 1 \times e^{-2x} + (-2e^{-2x}) \times x$
  $= e^{-2x}(1-2x)$
- $f''(x) = -2e^{-2x}(1-2x) + (-2) \times e^{-2x}$
  $= -2e^{-2x}(1-2x+1)$
  $= -4e^{-2x}(1-x)$

$$\boxed{f''(x) = 4e^{-2x}(x-1)}$$

Rappel : ici on a une dérivée du type $u \times v$ donc $(u \times v)' = u'v + v'u$ et surtout pas $u'xv'$! (erreur classique)

2) Réponse c

Justification : il y a 3 possibilités parmi 12, il s'agit ici d'une combinaison, soit $\binom{12}{3}$ possibilités $= \boxed{220 \text{ possibilités}}$

3) Réponse b

Justification : D'après le graphique de f', on a

x	0		2		5		7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Rappel : Bien associé le signe de f' aux variations de f et NON les variations de f' aux variations de f.

4) Réponse b

Justification : On extrait de l'énoncé
- $P(A) = 0,028$
- $P(B) = 0,022$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,954$

On a $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,954 = 0,046$

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$= 0,028 + 0,022 - 0,046$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,004}$$

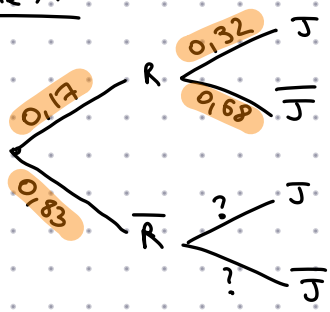
5) Réponse b

Justification :
- f est croissante sur $]-\infty ; -1]$, donc f' est positive sur cet intervalle
- f est décroissante sur $[-1 ; +\infty[$, donc f' est négative sur cet intervalle

Exercice 2

Partie A

1)



2) On a :
$P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J)$
$= 0,17 \times 0,32$
$P(R \cap J) = 0,054$

3) $\{R ; \overline{R}\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle (on peut également dire que les évènements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers de probabilité non nulle)
donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J)$$

donc :

$$P(\overline{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J)$$
$$= 0,11 - 0,054$$
$$P(R \cap J) = 0,056$$

4) On a $P(\overline{R}) = 0,83 \neq 0$, donc

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})}$$
$$= \frac{0,056}{0,83}$$
$$P_{\overline{R}}(J) = 0,067$$

Remarque : il est possible de répondre à cette question sans avoir fait les autres !

Partie B

1) On réalise 50 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique (au hasard) et indépendante (tirage avec remise) dont le succès est l'évènement R : "la personne utilise régulièrement les transports en commun" qui a pour probabilité 0,17.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 50$ et $p = 0,17$.

ie $X \hookrightarrow \mathcal{B}(50 ; 0,17)$

2) $P(X=5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times 0,83^{45}$

$P(X=5) = 0,069$

La probabilité d'avoir 5 personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 est de 0,069.

3) A la calculatrice on obtient $P(X \leqslant 13) = 0,964$ LMS

Donc $P(X \leqslant 13) > 0,95$

L'affirmation du recenseur est donc vraie.

4) On cherche à calculer l'espérance de X.

On a

$E(X) = n \times p$

$= 50 \times 0,17$

$E(X) = 8,5$

Parmi les 50 personnes interrogées, il y a en moyenne 8,5 personnes qui utilisent régulièrement les transports en commun.

Exercice 3

1) En juin 2020, 85% des collaborateurs en télétravail en mai 2020 choisissent de rester en télétravail et 450 nouveaux collaborateurs s'y ajoutent. d'où

$a_1 = 0,85\, a_0 + 450$

$a_1 = 0,85 \times 200 + 450$

$a_1 = 620$

2) A l'année $n+1$, on a :

- 85% des collaborateurs du mois n qui restant en télétravail
- 450 nouveaux collaborateurs qui commencent le télétravail.

On a donc nécessairement :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 0,85\, a_n + 450$

3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$v_{n+1} = a_{n+1} - 3000$

$= 0,85\, a_n + 450 - 3000$

$= 0,85\, a_n - 2250$

$= 0,85\,(a_n - 3000)$

$v_{n+1} = 0,85\, v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = a_0 - 3000 = -2800$

b) D'après la question précédente, on peut dire que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -2800 \times 0,85^n$

c) On a pour tout entier naturel n :

$v_n = a_n - 3000$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 3000 - 2800 \times 0,85^n$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$a_n > 2500 \iff 3000 - 2800 \times 0{,}85^n > 2500$

$\iff 500 > 2800 \times 0{,}85^n$

$\iff \frac{5}{28} > 0{,}85^n$

$\iff \ln(5/28) > n \ln(0{,}85)$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\hookrightarrow n > \ln(5/28)/\ln(0{,}85)$ (car $\ln(0{,}85) < 0$).

Or $\ln(5/28)/\ln(0{,}85) \approx 10{,}6$.

Donc le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieurs à 2500 au bout de 11 mois.

On peut également répondre à cette question par programmation :

```
def teletravail(p):
    a = 200
    mois = 0
    while a <= p:
        a = 0,85 * a + 250
        mois = mois + 1
    return mois
```

(en effet on ne précise pas la méthode !)

On doit ensuite chercher teletravail(2500)

Partie B

1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a :

$\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x+4)}{(x+2)^2}$

Rappels : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

ie $\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$

Ainsi $\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) > 0$

Donc f est croissante strictement sur $[0;+\infty[$

2) a) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$". Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On a $u_1 = \frac{5u_0 + 4}{u_0 + 2} = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$

donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Remarque : il est précisé ici récurrence simple (par parce qu'elle est facile) car il existe des récurrences doubles et des récurrences fortes qui dépendent du nombre d'hypothèses de récurrence

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. | MS

Par hypothèse de récurrence, on a :

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

Ainsi par stricte croissance de la fonction f sur $[0;+\infty[$, on a :

$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$

ie $0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \underbrace{\frac{24}{8}}_{3} \leqslant 4$

ie $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n par principe de récurrence simple, ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

b) (u_n) est croissante et majorée (q°2a) donc d'après le théorème de la limite monotone (u_n) converge vers un réel ℓ

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \iff 4 - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 4$

Remarque
Penser à citer vos théorème !

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$.

Ainsi d'après le théorème des gendarmes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Donc au bout d'un grand nombre de mois, le nombre de collaborateur satisfaits par cette nouvelle mesure va tendre vers 4000.

Exercice A

1) On a : • $\vec{AB}(1;0;2)$
• $\vec{AC}(-2;5;1)$
• $\vec{BC}(-3;5;-1)$

On en déduit que : $AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$

$AC^2 = \|\vec{AC}\|^2 = (-2)^2 + 5^2 + 1^2 = 30$

$BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 = (-3)^2 + 5^2 + (-1)^2 = 35$.

On a $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2) a) Deux vecteurs directeurs du plan ABC sont les vecteurs :
$\vec{AB}\ (1;0;2)$
$\vec{AC}\ (-2;5;1)$

On a : $-\ \vec{AB}.\vec{n} = 1\times 2 + 0\times 1 + 2\times(-1) = 0$
$-\ \vec{AC}.\vec{n} = -2\times 2 + 5\times 1 + 1\times(-1) = 0$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) donc il existe un réel d tel qu'une équation cartésienne de (ABC) est :

$2x + y - z + d = 0$.

Or $A(2;-1;0) \in (ABC)$, donc

$2\times 2 + (-1) - 0 + d = 0 \iff 4 - 1 - 0 + d = 0$
$\iff d = -3$

Ainsi une équation cartésienne de (ABC) est :

$2x + y - z - 3 = 0$

c) On a $S(0;1;4)$.
ie $2\times 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$
Donc $S \notin (ABC)$

Ainsi les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3) a) (d) est orthogonale au plan (ABC) donc un vecteurs directeurs de (d) est le vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ (normal au plan (ABC).

De plus $S \in (d)$.

Ainsi, une représentation paramétrique de (d) est :

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b) H est le point d'intersection entre (d) et (ABC)
donc les coordonnées de H $(x;y;z)$ sont solution du système $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$
$2x + y - z - 3 = 0$

MS

On a donc :
$2 \times 2t + 1 + t - (4-t) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0$
$\Leftrightarrow 6t - 6 = 0$
$\Leftrightarrow t = 1$

Ainsi les coordonnées $(x ; y ; z)$ de H sont :

$$\begin{cases} x = 2 \times 1 = 2 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

D'où $H(2 ; 2 ; 3)$

4) La base du tétraèdre ABCS est le triangle ABC :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2}$$

La hauteur du tétraèdre ABCS est le segment [HS] et on a :

$$HS = \|\overrightarrow{HS}\| = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2 + (4-3)^2}$$

ie $HS = \sqrt{6}$

D'où le volume du tétraèdre ABCS :

$$V = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \times HS}{3}$$

ie $V = \frac{\sqrt{150} \times \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{900}}{6} = \frac{30}{6}$

$$V = 5$$

5) a) $\overrightarrow{SA}(2 ; -2 ; -4)$

Donc $SA = \|\overrightarrow{SA}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2}$

$SA = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) On a :

$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\overrightarrow{SA} ; \overrightarrow{SB})$ (c'est la définition du produit scalaire)

Donc $\cos(\widehat{ASB}) = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{SA \times SB} \Rightarrow \widehat{ASB} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}}{SA \times SB}\right)$

Or on a $\overrightarrow{SA}(2 ; -2 ; -4)$ et $\overrightarrow{SB}(3 ; -2 ; -2)$

donc $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2 \times 3 - 2 \times (-2) - 4 \times (-2) = 18$

Ainsi $\widehat{ASB} = \arccos\left(\frac{18}{\sqrt{24} \times \sqrt{17}}\right)$

ie $\widehat{ASB} = 27{,}0°$

Exercice B

Partie A

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x réels, on a :

$$g'(x) = 2x\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-1/3\,x} + \frac{2}{3}$$

ie $\boxed{g'(x) = \frac{-2}{3}e^{-1/3\,x} + \frac{2}{3}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-1/3\,x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) \geqslant 0 \iff \frac{2}{3}\left(1 - e^{-1/3\,x}\right) \geqslant 0$$

$$\iff 1 - e^{-1/3\,x} \geqslant 0 \quad (2/3 > 0)$$

$$\iff 0 \leqslant e^{-1/3\,x} \leqslant 1$$

$$\iff -\frac{1}{3}x \leqslant 0 \quad \text{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

$$\iff x \geqslant 0 \quad (-1/3 < 0)$$

Ainsi :
- g est croissante strictement sur $[0\,;+\infty[$
- g est décroissante strictement sur $]-\infty\,;0]$

3) D'après la question précédente, on en déduit que g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ qui est $g(0) = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$

g est donc positive sur $\mathbb{R}$

Partie B

1) On a $3y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{3}y \quad (\mathcal{E})$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{y : x \mapsto ke^{-1/3\,x} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$$

2) La solution particulière y_p dont la courbe représentative passe par le point $M(0\,;2)$ vérifie $y_p(0) = 2$.

Donc on a d'après la question précédente, avec $k \in \mathbb{R}$:

$$y_p(0) = 2 \iff ke^0 = 2$$

$$\iff k = 2$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p(x) = 2e^{-1/3\,x}$

3) a) f est solution de (E) on a donc :

$$f'(0) = -\frac{1}{3} f(0)$$

$$f'(0) = -\frac{2}{3}$$

Or la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(0;2)$ a pour équation :

$$(\Delta_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

donc $\boxed{(\Delta_0) : y = -\frac{2}{3}x + 2}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) - y = 2e^{-1/3x} + \frac{2}{3}x - 2$$

ie $\boxed{f(x) - y = g(x)}$

Or d'après A3 ; on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$

Donc sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente (Δ_0) et elles se croisent en $x = 0$

Partie C

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

L'équation de la tangente (Δ_a) est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Or $f'(a) = -\frac{1}{3} f(a)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ y = -\frac{1}{3} f(a)(x-a) + f(a)$

ie $\forall x \in \mathbb{R},\ y = f(a)\left(-1/3\,(x-a) + 1\right)$

Ainsi :

$$y = 0 \iff f(a)\left(-1/3\,(x-a) + 1\right) = 0$$

$$\iff f(a) = 0 \text{ ou } -\frac{1}{3}(x-a) + 1 = 0$$

$$\iff -\frac{1}{3}(x-a) + 1 = 0 \quad \text{(car } \forall a \in \mathbb{R},\ f(a) > 0 \text{ par stricte positivité de la fonction exponentielle)}$$

$$\iff x - a = 3$$

$$\iff x = a + 3$$

Ainsi (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en $x = a+3$

2) (Δ_{-2}) passe par le point d'abscisse $(-2 ; f(-2))$ (sur la courbe $\mathcal{C}_f$) MS et elle coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(1 ; 0)$ d'après la question précédente.

Il suffit donc de relier ces deux points par tracer (Δ_{-2})

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.