Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

# Spécialité Mathématiques - Métropole Candidat libre 2 - 2021 MS

## Exercice 1 (Justifications données à but pédagogique mais non exigées)

1) **Réponse b**

Justification : Si $t = 5$, on a :
$$\begin{cases} x = -4 + 3\times 5 = 11 \\ y = 6 - 3\times 5 = -9 \\ z = 8 - 6\times 5 = -22 \end{cases}$$
Ainsi le point $M_2(11, -9, -22)$ appartient à $\mathcal{D}'$

2) **Réponse c**

Justification : D'après la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Ainsi $\vec{u_3}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$

3) **Réponse d**

Justification : Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{u_3}$.

Ainsi $\vec{AB}$ et $\vec{u_3}$ sont colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc parallèles.
De plus, si $t = 5/3$, on a d'après la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$ :
$$\begin{cases} x = -4 + 3\times 5/3 = 1 \\ y = 6 - 3\times 5/3 = 1 \\ z = 8 - 6\times 5/3 = -2 \end{cases}$$
Donc le point A appartient aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc confondues.

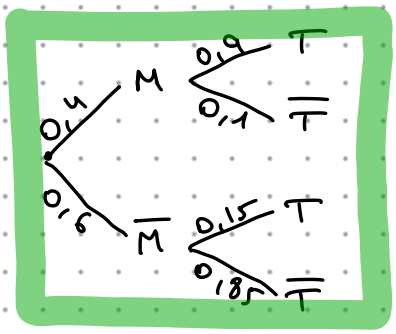
4) **Réponse c**

Justification : Soit $m \in \mathbb{R}$
Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$
$\Leftrightarrow 1\times(-2) + m\times 2 + (-2)\times 4 = 0$
$\Leftrightarrow 2m - 10 = 0$
$\Leftrightarrow m = 5$

## Exercice 2

1) a)




b) On cherche à calculer $P(M \cap T)$.
$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$
$= 0,4 \times 0,9$
$P(M \cap T) = 0,36$

c) $\{M ; \overline{M}\}$ est un système complet d'événement de probabilité non nulle, ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$
$= P(M \cap T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$
$= 0,36 + 0,6 \times 0,15$

$P(T) = 0,45$

d) On cherche à calculer la probabilité $P_T(M)$.

Comme $P(T) \neq 0$, on a :

$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$

ie $P_T(M) = \frac{0,36}{0,45}$

ie $P_T(M) = 0,8$

2) a) On répète 20 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique (les chats sont choisis au hasard) et indépendante (tirage avec remise), dont le succès "le test est positif" a pour probabilité 0,45 (q°1c).

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20 ; 0,45)$

b) $P(X=5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times 0,55^{15}$

ie $P(X=5) = 0,036$

La probabilité d'avoir exactement cinq chats positifs au test est de 0,036.

c) A la calculatrice, on obtient :

$P(X \leq 8) = 0,44$

La probabilité d'avoir au maximum 8 chats positifs est de 0,44.

d) $E(X) = 20 \times 0,45$

ie $E(X) = 9$

On aura en moyenne 9 chats présentant un test positif dans l'échantillon.

3) a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On répète m fois une épreuve de Bernoulli de manière identique (les chats sont choisis au hasard) et indépendante (tirage avec remise), dont le succès "le test est positif" a pour probabilité 0,45 (q°1c).

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m ; 0,45)$

On a :

$p_m = P(Y \geq 1)$
$= 1 - P(Y < 1)$
$= 1 - P(Y = 0)$
$= 1 - \binom{m}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^m$

$p_m = 1 - 0,55^m$

b) Le rôle du programme Python est de déterminer le rang minimal m à partir duquel $p_m \geq 0,99$

c) Soit $m \in \mathbb{N}$.

$p_m \geq 0,99 \iff 1 - 0,55^m \geq 0,99$
$\iff 0,55^m \leq 0,01$
$\iff m \ln(0,55) \leq \ln(0,01)$ , par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
$\iff m \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)}$

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \approx 7,7$

Le programme renverra donc la valeur 8.

## Exercice 3

1) A partir des valeurs du tableau, on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{4}{u_n} = n+4$$

2) Pour tout entier naturel $n$, on définit la proposition $\mathcal{P}_n$ : "$u_n > 0$".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

On a $u_0 = 1 > 0$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence on a :

- $u_n > 0$ ie $4u_n > 0$
- $u_n + 4 > 4 > 0$

Donc $\dfrac{4u_n}{u_n+4} > 0$ ie $u_{n+1} > 0$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n$ par principe de récurrence simple, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n}{u_n+4} - u_n \\ &= \frac{4u_n - u_n(u_n+4)}{u_n+4} \\ &= -\frac{u_n^2}{u_n+4} < 0 \quad \text{, car } u_n > 0 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)$ est décroissante.

4) La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\cancel{4}}{1} \times \frac{u_n+4}{\cancel{4}u_n} \\ &= 1 + \frac{4}{u_n} \end{aligned}$$

ie $v_{n+1} = 1 + v_n$

$(v_n)$ est donc une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = 4/u_0 = 4$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4 + n$

6) D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4}{4+n}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

## Exercice A

### Partie I

1) * $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \ln(x) \times \frac{1}{x^2}$

et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée.

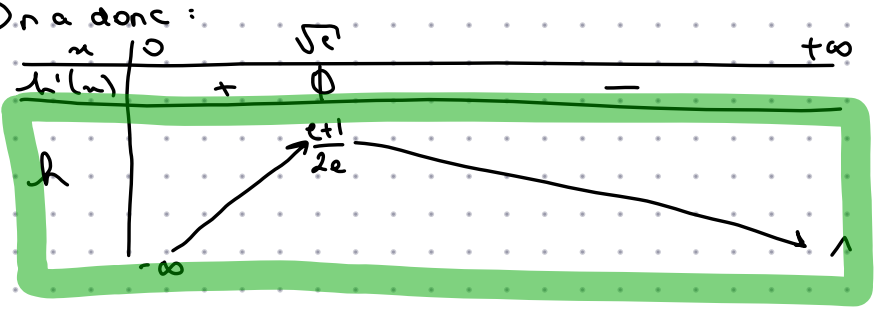
2) $h$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonction qui le sont, et on a :
$\forall x \in ]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{1/x \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4}$

ie $\forall x \in ]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$

ie $\forall x \in ]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

3) On a pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $x^3 > 0$.
Le signe de $h'$ dépend donc du signe du numérateur.
Soit $x \in ]0;+\infty[$.
$1 - 2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 1/2$
$\iff x \leqslant \sqrt{e}$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

On a donc :




4) • $h$ est continue sur $]0;+\infty[$.
• $h$ est strictement croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{e};+\infty[$
• On a : $h(]0;\sqrt{e}]) = ]-\infty;\frac{e+1}{2e}]$ et $0 \in ]-\infty;\frac{e+1}{2e}]$ (car $\frac{e+1}{2e} > 0$)

et $h(]\sqrt{e};+\infty[) = ]1;\frac{e+1}{2e}]$ et $0 \notin ]1;\frac{e+1}{2e}[$

Ainsi d'après le théorème de la bijection l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0;+\infty[$

Par ailleurs, à la calculatrice, on a : $h(0,5) < 0$ et $h(1) > 0$.
Ainsi : $0,5 < \alpha < 1$

## Partie II

1) Soit $x \in ]0;+\infty[$.

$$f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$f_1(x) - f_2(x) = h(x)$

2) D'après I.5, on a :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(en effet, le minimum de $h$ sur $]\alpha;+\infty[$ est $1>0$)

Ainsi sur $]0;\alpha[$, la courbe $\mathcal{C}_1$ est en-dessous de $\mathcal{C}_2$.
sur $]\alpha;+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$.

Par ailleurs, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$, il y a donc un unique point d'intersection entre les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de coordonnées $(\alpha; f_1(\alpha))$, ie $(\alpha;\alpha)$

car $f_1(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}$

$= \alpha - \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right)$

$= \alpha - h(\alpha)$

$= \alpha$

## Exercice B

### Partie I

1) $f'$ semble positive sur $]-\infty;-1]$ et négative sur $]-1;+\infty[$.
On conjecture donc que $f$ est croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $]-1;+\infty[$.

2) • $f'$ semble décroissante sur $]-\infty;0]$ ($f''(x) \leqslant 0$) donc $f$ serait concave sur $]-\infty;0]$.
• $f'$ semble croissante sur $]0;+\infty[$ ($f''(x) \geqslant 0$) donc $f$ serait convexe sur $]0;+\infty[$.

### Partie II

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= e^{-x}(x+2)$$

$\frac{x}{e^x} + 2e^{-x} = f(x)$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} 2e^{X} = 0$

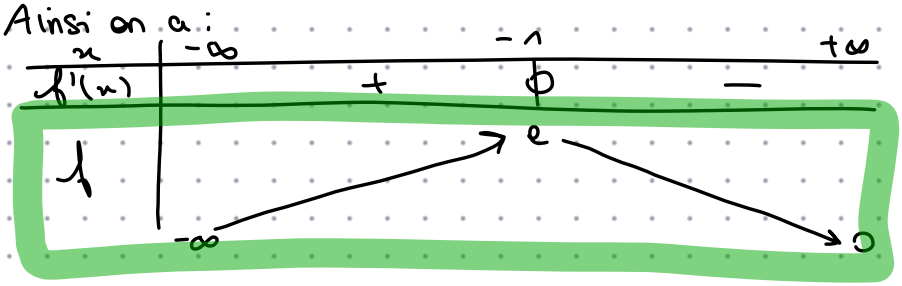
f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont et on a pour tout $x$ réels :

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (-e^{-x})(x+2)$

$f'(x) = e^{-x}(-x-1)$

b) Par positivité de la fonction exponentielle, on a pour tout $x$ réels $e^{-x} > 0$.
Par ailleurs on a pour tout $x$ reels :
$-x-1 \geqslant 0 \iff x \leqslant -1$
Ainsi on a :




et $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$

c) • f est continue sur $[-2;-1]$ comme produit de fonction qui le sont
• f est strictement croissante sur $[-2;-1]$.
• $f([-2;-1]) = [0;e]$ (et $e \approx 2,71$)
Or $2 \in [0;e]$
Ainsi d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[-2;-1]$

D'après la calculatrice, on obtient $-1,6 < \alpha < -1,5$ (afficher le tableau de valeur de la fonction avec un pas de $10^{-1}$)

3) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont et on a pour tout $x$ réels :

$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (-e^{-x})(-x-1)$

$f''(x) = xe^{-x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | − | 0 | + | |

par positivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$

Ainsi f est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Au point A d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}$ change de convexité donc A correspond au point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.