Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul des deux exercices A ou B**.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + m\,y - 2\,z + 8 = 0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $M_1(-1;3;-2)$ **b.** $M_2(11;-9;-22)$ **c.** $M_3(-7;9;2)$ **d.** $M_4(-2;3;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est :

a. $m = -1$ **b.** $m = 1$ **c.** $m = 5$ **d.** $m = -2$

Exercice 2, commun à tous les candidats (6 points)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.
a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à $0{,}45$.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil():
    n=0
    P=0
    while P<0.99:
        n=n+1
        P=1-0.55**n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}\ .$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$ (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0;+\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2} \ .$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha;\alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité.

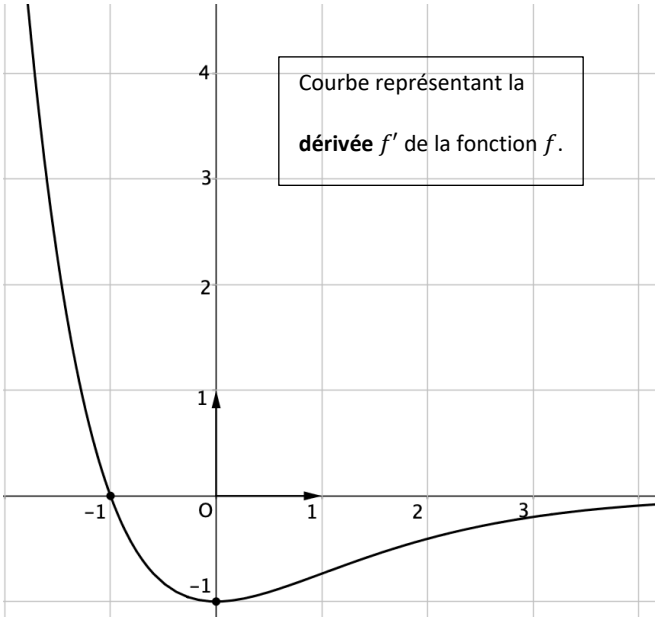
PARTIE I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



PARTIE II

On admet que la fonction *f* mentionnée dans la **Partie I** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{-x}\,.$$

En déduire la limite de *f* en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction *f*. Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.