Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers [1] 22 mars 2023 ∾

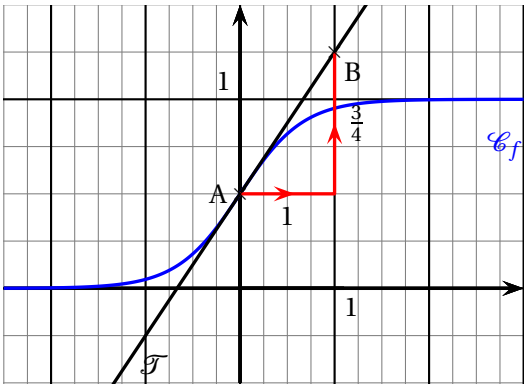
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$



Partie A : lectures graphiques

1. Comme indiqué sur la figure pour aller de A en B points de la tangente : + 1 puis $+\frac{3}{4}$, donc coefficient directeur de $\frac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{2}$.
   $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.
2. La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction

1. En posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$.
   De $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, on a donc $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2} = \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$.
2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-3x} > 1 > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Avec $X = -3x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x} = 1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.
   Rem. la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

1. Europe

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x}$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0$.
Rem. la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

4. On a $f(x) = 0,99 \iff \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0,99 \iff 1 = 0,99\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff 1 = 0,99 + 0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff 0,01 = 0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{0,01}{0,99} = \mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{1}{99} = \mathrm{e}^{-3x}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln\left(\dfrac{1}{99}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff \ln 1 - \ln 99 = -3x \iff -\ln 99 = -3x \iff x = \dfrac{\ln 99}{3}$ (valeur approchée à la calculatrice 1,532).

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

- $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$;
- $f'(0) = \dfrac{3}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$. Donc :

$M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(x-0) \iff y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Comme $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{-3x} - 1$:

- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} = 1 \iff -3x = \ln 1 = 0 \iff x = 0$;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} > 1 \iff -3x > \ln 1 = 0 \iff x < 0$;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} < 1 \iff -3x < \ln 1 = 0 \iff x > 0$;

3. **a.** La question précédente a montré que la dérivée seconde est positive sur $]-\infty\,;\,0[$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

b. La dérivée seconde s'annule en $x = 0$ en changeant de signe, donc le point A de la courbe représentative d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. En chacun des points de l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe donc au dessus de toutes les tangentes et en particulier de la tangente $\mathscr{T}$ en A.

De même en chacun des points de l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur donc au dessous de toutes les tangentes et en particulier de la tangente $\mathscr{T}$.

En A la courbe et la tangente $\mathscr{T}$ ont le point $\mathrm{A}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ en commun.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. $\ln u$ est défini si $u > 0$, soit $1 + x > 0 \iff x > -1$.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

2. En posant $u(x) = 1 + x$ et donc $u'(x) = 1$, on a alors si $f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

3. **a.** On sait que $1 + x > 0$, donc le signe de la dérivée est celui de x :

- $f'(x) = 0 \iff x = 0$;
- $f'(x) > 0 \iff x > 0$: la fonction est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$;
- $f'(x) < 0 \iff x < 0$; la fonction est décroissante sur $]-1\,;\,0[$.

b. La fonction f est décroissante sur $]-1\,;\,0[$ puis croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle a donc un minimum en $x = 0$, $f(0) = 0 - 0 = 0$.

Son minimum étant nul, on a donc sur $]-1\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

4. **a.** On sait que quel que soit le réel x, $x = \ln \mathrm{e}^x$. On peut donc écrire :

$f(x) = \ln \mathrm{e}^x - \ln(1+x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right)$ par propriété de la fonction logarithme népérien :

$\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

b. En posant $u = 1 + x \iff x = u - 1$, on a $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{u-1}}{u}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^u \times \mathrm{e}^{-1}}{u}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right)$.

Or $x \to +\infty \implies x + 1 = u \to +\infty$ et on sait que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$, donc $\lim\limits_{u\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right) = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

1. Avec $n = 0$, la relation de récurrence donne : $u_1 = u_0 - \ln(1 + u_0) = 10 - \ln(1 + 10) = 10 - \ln 11 \approx 7{,}602$.

2. *Initialisation* : on a $u_0 = 10 \geqslant 0$: l'inégalité est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 0$: d'après la question **3. a.** la fonction est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, et $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$, donc $0 \leqslant u_{n+1}$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

3. On a $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n) \iff u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$.

Or on vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0 \implies 1 + u_n \geqslant 1$ puis par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln(1 + u_n) \geqslant \ln 1$, soit $\ln(1 + u_n) \geqslant 0 \iff -\ln(1 + u_n) \leqslant 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0 converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$

5. On a $u_{n+1} = f(u_n)$. On a vu que cette fonction est dérivable donc continue sur $]-1\ ;\ +\infty[$; de plus la suite (u_n) converge vers ℓ, donc à la limite :

$\ell = \ell - \ln(1+\ell) \iff \ln(1+\ell) = 0$ ou $\ln(1+\ell) = \ln 1 \iff 1+\ell = 1 \iff \ell = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3\ ;\ 0\ ;\ 1), \qquad B(2\ ;\ 1\ ;\ 2) \quad \text{et} \quad C(-2\ ;\ -5\ ;\ 1).$$

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$: ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires ; les trois points A, B et C définissent donc un plan noté (ABC).

2. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)\times(-5)+1\times(-5)+1\times 0 = 5-5+0 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires en A et le triangle ABC est rectangle en A.

3. On a $A(3\ ;\ 0\ ;\ 1) \in ABC \iff -3+0-2+5 = 0$ égalité vraie ;

$B(2\ ;\ 1\ ;\ 2) \in ABC \iff -2+1-4+5 = 0$ égalité vraie ;

$A(-2\ ;\ -5\ ;\ 1) \in ABC \iff 2-5-2+5 = 0$ égalité vraie.

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation donnée : comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés une équation du plan ABC est :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in ABC \iff -x+y-2z+5 = 0.$$

4. On considère le point $S(1\ ;\ -2\ ;\ 4)$.

On sait qu'un vecteur normal au plan ABC a pour coordonnées les coefficients de x, y et z dans l'équation de ce plan. Donc on a $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

La droite (Δ) orthogonale au plan ABC a un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\vec{n}$.

Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{SM} = t\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, ce qui se traduit par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x-1 &= -t \\ y-(-2) &= 1t \\ z-4 &= -2t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= -2+t \\ z &= 4-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \iff M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\Delta).$$

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

Le point commun à la droite (Δ) et au plan ABC a ses coordonnées qui vérifient les équations de Δ et l'équation du plan, soit le système :

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= -2+t \\ z &= 4-2t \\ -x+y-2z+5 &= 0 \end{cases}$$ En remplaçant x, y et z dans la dernière équation par leur valeur en fonction de t, on obtient :

$-(1-t)+(-2+t)-2(4-2t)+5=0 \iff -1+t-2+t-8+4t+5=0 \iff 6t-6=0 \iff t=1$
On a donc $x=1-1=0$, $y=-2+1=-1$, $z=4-2=2$, soit H(0 ; −1 ; 2).

6. On a $SH^2=(0-1)^2+(-1-(-2))^2+(2-4)^2=1+1+4=6$, donc $SH=\sqrt{6}$.

7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.

Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$. On a $HB^2=(-2)^2+(-2)^2+0^2=4+4=4\times 2$, d'où $HB=2\sqrt{2}$.

L'aire du disque $\mathscr{D}$ est égale à $\mathscr{A}=\pi\times HB^2=8\pi$.

8. (SH) est perpendiculaire au plan ABC du disque, donc [SH] est la hauteur du cône et la base est le disque $\mathscr{D}$, donc :

$\mathscr{V}=\dfrac{8\pi\times\sqrt{6}}{3}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n=50$.

1. On a $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-0,04^0\times 0,96^{50}\approx 1-0,1299\approx 0,8701$ soit 0,870 au millième près : réponse **b.**

2. La probabilité $p(3<X\leqslant 7)$ est égale à : $p(X\leqslant 7)-p(x\leqslant 3)\approx 0,9992-0,8609$ soit 0,1383. Réponse **b.**

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

La calculatrice donne $k=4$, réponse **c.**

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

a. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
Réponse **a.**

b. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?
La fonction donne le plus petit naturel n tel que $1-0,96^n\geqslant$ x.
Réponse **a.**

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.