Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

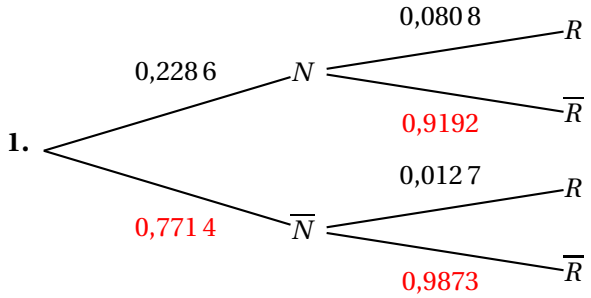
Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord - 22 mai 2024

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1 Exercice 1 — 5 points



2. On calcule $p(N\cap R) = p(N)\times p_N(R) = 0{,}228\,6\times 0{,}080\,8 = 0{,}018\,471$ soit $0{,}018\,5$ à 10^{-4} près.

3. On a de même $p\left(\overline{N}\cap R\right) = p\left(N\right)\times p_{\overline{N}}(R) = 0{,}771\,4\times 0{,}012\,7 = 0{,}009\,797$ soit $0{,}009\,8$ à 10^{-4} près.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(R) = p(N\cap R) + p\left(\overline{N}\cap R\right) \approx 0{,}018\,5 + 0{,}009\,8$

$p(R) \approx 0{,}028\,3$.

4. On a $p_R(N) = \dfrac{p(R\cap N)}{p(R)} = \dfrac{p(N\cap R)}{p(R)} \approx \dfrac{0{,}018\,5}{0{,}028\,3} \approx 0{,}653\,71$ soit $0{,}653\,7$ à 10^{-4} près.

Partie I

1. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n = 500,\ p = 0{,}65)$.

2. On calcule $\binom{500}{325}\times 0{,}65^{325}\times 0{,}35^{175} \approx 0{,}037\,384$ soit $0{,}037\,4$ à 10^{-4} près. (Utiliser la fonction binomiale de la calculatrice si les capacités de calcul de celle-ci sont dépassées).

3. On a $p(X \geqslant 325) = 1 - p(X \leqslant 324)$ soit d'après la calculatrice $0{,}479\,44$, donc

$p(X \geqslant 325) \approx 1 - 0{,}479\,4 = 0{,}520\,6$ à 10^{-4} près.

Partie II

1. On a $p_n = (1-0{,}65)^n = 0{,}35^n$.

2. On a $q_n = 1 - p_n$.

On cherche donc n tel que $1 - p_n \geqslant 0{,}999\,9 \iff p_n \leqslant 0{,}000\,1$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

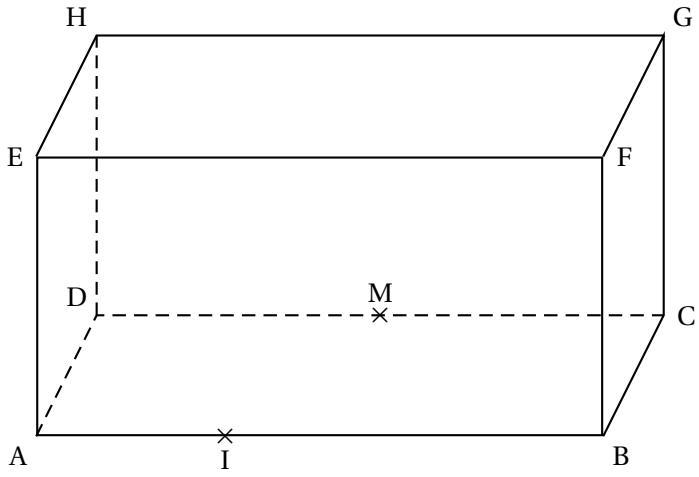
$n\ln 0{,}35 \leqslant \ln 00{,}000\,1 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}000\,1}{\ln 0{,}35}$ car $\dfrac{1}{\ln 0{,}35} < 0$.

D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0{,}000\,1}{\ln 0{,}35} \approx 8{,}8$.

Il faut prendre au minimum $n = 9$.

2 Exercice 2 — 5 points

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



1. F(3 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), M(1,5 ; 1 ; 0).

2. **a.** Soit $\overrightarrow{\text{HF}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MF}}\begin{pmatrix}1,5\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{HF}} = 6-6+0 = 0$

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{MF}} = 3-6+3 = 0$.

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$X(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z+d=0$. Ainsi par exemple :

$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{MHF}) \iff 0+6+3+d=0 \iff d=-9$, donc finalement :

$$X(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{MHF}) \iff 2x+6y+3z-9=0.$$

c. Le plan $\mathscr{P}$ a par exemple pour vecteur normal $\vec{p}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}$, (on a bien $2\times\dfrac{5}{2}=5, 6\times\dfrac{5}{2}=15$, mais $3\times\dfrac{5}{2}\neq -3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a D(0 ; 1 ; 0) et G(3 ; 1 ; 1), d'où $\overrightarrow{\text{DG}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

On sait que :

$$X(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{DG}) \iff \overrightarrow{\text{DX}} = t\overrightarrow{\text{DG}},\ t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x-0 &= 3t \\ y-1 &= 0 \\ z-0 &= 1t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x &= 3t \\ y &= 1 \\ z &= t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\begin{cases} x &= 3t \\ y &= 1 \\ z &= t \\ 2x+6y+3z-9 &= 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$6t+6+3t-9=0 \iff 9t-3=0 \iff 3t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{3}$. Les coordonnées de N sont donc $\left(3\times\frac{1}{3}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$, soit $\text{N}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$\text{R}\left(3\ ;\ \dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right) \in (\text{HMF}) \iff 6+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-9=0 \iff 6+3-9=0$ ce qui est vrai.

• On vérifie maintenant que le vecteur $\overrightarrow{\text{GR}}$ est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

On a $\overrightarrow{\text{GR}}\begin{pmatrix} 3-3 \\ \frac{1}{4}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vecteur connu $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: pour que $\vec{n}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\text{GR}}$ il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

3 Exercice 3 — 6 points

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\ ;\ 1]$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 2-2x = 2(1-x)$.

Or on sait que $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow -x \leqslant 0 \leqslant 1-x$ ou en lisant de droite à gauche

$1-x \geqslant 0 \Rightarrow 2(1-x) \geqslant 0 \iff g'(x) \geqslant 0$: la dérivée étant positive sur $[0\ ;\ 1]$ et ne s'annulant qu'en $x=1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0)=0$ à $g(1)=2-1^2=1$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. • $u_1 = 2\times\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$;

• $u_2 = 2\times\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{24}{16} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16} = 0{,}9375$.

3. Démonstration par récurrence :

• *Initialisation* :

On a $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.

• *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Alors par stricte croissance sur $[0\,;\,1]$ de la fonction g, on a :

$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :

$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang $n = 0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc

Pour tout entier naturel n, $: 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leqslant 1$.

5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$

$\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1-\ell) = 0$ soit

$$\begin{cases} \ell &= 0 \text{ ou} \\ 1-\ell &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell &= 0 \text{ ou} \\ 1 &= \ell \end{cases}$$

La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1-u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln\left[1-\left(2u_n - u_n^2\right)\right] = \ln\left(1-2u_n+u_n^2\right) = \ln(1-u_n)^2 = 2\ln(1-u_n)$ (car $1-u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1-u_n)$ existe). Or $\ln(1-u_n) = v_n$.

Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1-u_0) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.

8. La relation $v_n = \ln(1-u_n)$ donne donc :

$-\ln 2 \times 2^n = \ln(1-u_n) \iff \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln(1-u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :

$\mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = 1-u_n \iff u_n = 1 - \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n}$.

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\ln 2\times 2^n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

9.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n
```

4 Exercice 4 — 4 points

$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. On a $f(x) = 0 \iff a\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^0 \iff x = 1$.

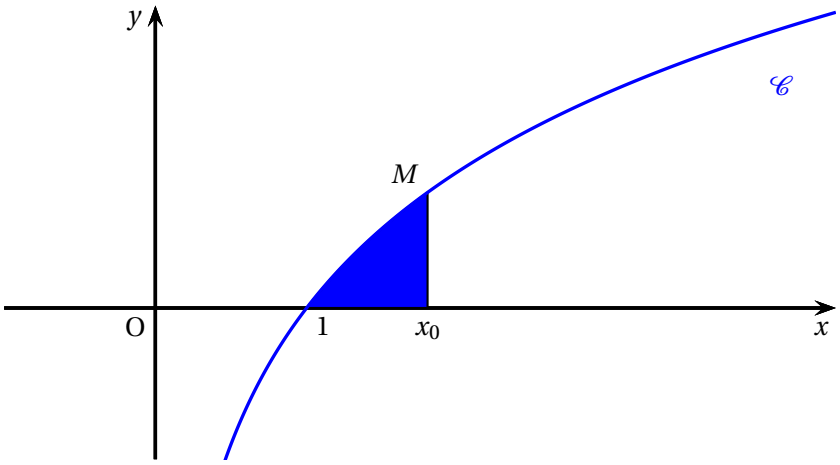
2. F est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle :
$F'(x) = a\left[\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1\right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a\ln(x) = f(x)$, ce qui montre que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On a vu que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geqslant 1$, soit $\ln(x) \geqslant 0 \Rightarrow a\ln(x) \geqslant 0$.

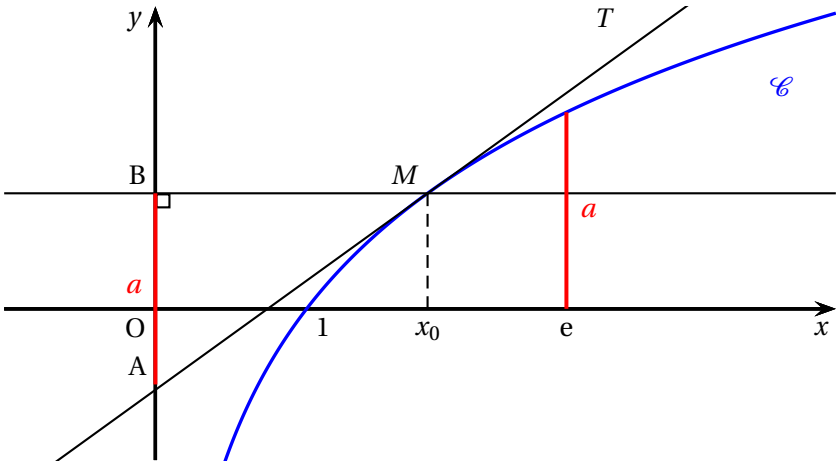
Autrement dit pour $x \geqslant 1$, la fonction f est positive et on sait que sur un intervalle $[1\,;\,x_0]$ avec $x_0 \geqslant 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

$$\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0\ln(x_0) - x_0] - a[1\ln(1) - 1] = .$$

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0\ln(x_0) - x_0] + a = a\,[x_0\ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. On sait (équation de la tangente au point d'abscisse x_0) que :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0))$.

- $f(x_0) = a\ln x_0$;
- f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \dfrac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$M(x\,;\,y) \in T \iff y - a\ln x_0 = \dfrac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a\ln x_0 + \dfrac{ax}{x_0} - a$.

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a\ln x_0 - a$ (ordonnée de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a\ln(x_0)$.

On a $\text{AB} = \left|y_\text{B} - y_\text{A}\right| = |a\ln(x_0) - (a\ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).

Remarque : On a $f(\text{e}) = a\ln\text{e} = a \times 1 = a$.

$f(\text{e}) = a$: on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.