Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Amérique du Sud – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On cherche une solution particulière de la forme : $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$

On calcule la dérivée :

$$g'(x) = ae^{-\frac{1}{4}x} + ax\left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\right) = ae^{-\frac{1}{4}x} - \frac{a}{4}xe^{-\frac{1}{4}x}$$

Donc :

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = ae^{-\frac{1}{4}x} - \frac{a}{4}xe^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4}\cdot axe^{-\frac{1}{4}x} = ae^{-\frac{1}{4}x}$$

On veut que ce soit égal à $20e^{-\frac{1}{4}x}$, donc : $a = 20$

Donc une solution particulière est : $g(x) = 20xe^{-\frac{1}{4}x}$

2. On résout l'équation homogène associée : (E'): $y' + \frac{1}{4}y = 0$

C'est une équation linéaire du premier ordre, à coefficients constants. La solution générale est : $y(x) = Ce^{-\frac{1}{4}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont les sommes : $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Avec $y_h(x) = Ce^{-\frac{1}{4}x}$ et $y_p(x) = 20xe^{-\frac{1}{4}x}$

Donc la solution générale de (E) est : $y(x) = (20x + C)e^{-\frac{1}{4}x}$

4. On cherche $f(x) = (20x + C)e^{-\frac{1}{4}x}$ telle que $f(0) = 8$

$$\Leftrightarrow f(0) = (20 \cdot 0 + C) \cdot 1 = C = 8$$

Donc :

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$$

Partie B

1.a On dérive $f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$

C'est un produit, donc on applique la règle : $f'(x) = (20x+8)' \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + (20x+8) \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\right)$

Soit : $f'(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}(20x+8)e^{-\frac{1}{4}x} = \left(20 - \frac{1}{4}(20x+8)\right)e^{-\frac{1}{4}x}$

On simplifie l'expression dans les parenthèses : $\frac{1}{4}(20x+8) = 5x + 2\ 20 - (5x+2) = 18 - 5x$

Donc : $f'(x) = (18-5x)e^{-\frac{1}{4}x}$

1.b Le signe de $f'(x)$ est donné par le facteur $18-5x$, car $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$ pour tout $x \geq 0$

- $f'(x) > 0$ si $x < \frac{18}{5} = 3{,}6$
- $f'(x) = 0$ si $x = 3{,}6$
- $f'(x) < 0$ si $x > 3{,}6$

Donc, f est croissante sur $[0\ ;\ 3{,}6]$, décroissante sur $[3{,}6\ ;\ +\infty[$.

Valeur maximale atteinte en $x = 3{,}6$:

$$f(3{,}6) = (20 \cdot 3{,}6 + 8)e^{-\frac{1}{4}3{,}6} = (72+8)e^{-0{,}9} = 80e^{-0{,}9}$$

Tableau de variations :

x	0		3,6		$+\infty$
$f'(x)$	+		0	-	
f	8	↗	$80e^{-0{,}9}$	↘	0

2.a On cherche à savoir si l'équation $f(x) = 8$ a une unique solution dans $[14\ ;\ 15]$.

Or $f(x) = (20x+8)e^{-\frac{1}{4}x}$ est strictement décroissante sur $[3{,}6\ ;\ +\infty[$.

Donc, sur $[14\ ;\ 15]$, f est strictement décroissante. Cela garantit qu'elle ne coupe la droite $y = 8$ qu'une seule fois (si elle le fait).

On calcule les valeurs aux bornes :

- $f(14) = (20 \cdot 14 + 8)e^{-3{,}5} = 288e^{-3{,}5} \approx 8{,}69$
- $f(15) = (20 \cdot 15 + 8)e^{-3{,}75} = 308e^{-3{,}75} \approx 7{,}24$

On constate : $f(14) > 8 > f(15)$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $\alpha \in [14; 15]$ à $f(x) = 8$.

2.b On utilise la méthode de dichotomie, comme dans l'algorithme Python fourni.

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

2.c L'objectif de la fonction solution_equation() est de déterminer une valeur approchée de la solution α de l'équation $f(x) = 8$ par méthode de dichotomie, avec une précision de 0,1. Elle retourne un encadrement $[a; b]$ tel que $\alpha \in [a; b]$ et $b - a \leq 0{,}1$

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1.a On suppose qu'on a pioché une boule blanche dans U1 (il y en a 6 sur 10). On la met dans U2, qui contient alors :

- 1 boule noire
- 3 + 1 = 4 boules blanches

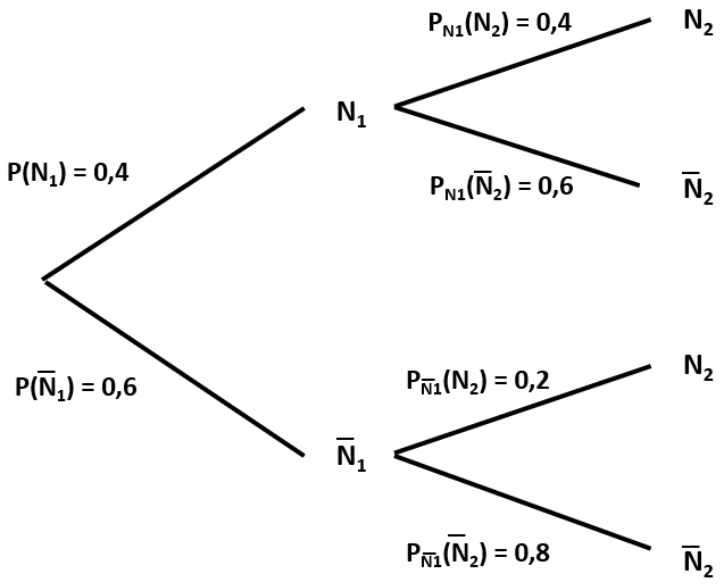
Donc : $P(N2 \mid \overline{N1})$ = probabilité de tirer une boule noire dans U2 = $\frac{1}{5} = 0{,}2$

1.b On complète l'arbre de probabilités :

- $P(N1)$ = 4/10 = 0,4
- $P(\overline{N1})$ = 6/10 = 0,6

Si on a mis une noire dans U2 (événement N1), alors U2 contient 2 noires et 3 blanches → $P(N2 \mid \mathrm{N1})$ = 2/5 = 0,4

Arbre pondéré complété :



2. Probabilité de N1 ∩ N2 = P(N1) × P(N2 | N1) $= 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

3. On utilise la loi des probabilités totales :

$$P(N2) = P(N1) \cdot P(N2 \mid N1) + P(\overline{N1}) \cdot P(N2 \mid \overline{N1})$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}16 + 0{,}12 = 0{,}28$$

4. On cherche $P(\overline{N1} \mid N2)$ On utilise la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(\overline{N1} \mid N2) = \frac{P(\overline{N1} \cap N2)}{P(N2)} = \frac{0{,}12}{0{,}28} \approx 0{,}43$$

Donc la probabilité d'avoir pioché une blanche dans U1 sachant qu'on a tiré une noire dans U2 est environ 0,43.

Partie B

1. À chaque expérience, la probabilité de succès (tirer une noire dans U2) est constante : 0,28 Les expériences sont indépendantes.

Donc X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(n,\ 0{,}28)$$

2. On cherche le plus petit entier n tel que :

$$1 - 0,72^n > 0{,}9 \Rightarrow 0,72^n < 0{,}1$$

On prend le logarithme :

$$n\ln(0{,}72) < \ln(0{,}1) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \approx 7{,}01$$

Donc le plus petit entier cherché est $n = 8$.

3. Cela signifie que si on répète l'expérience 8 fois, alors la probabilité de tirer au moins une fois une boule noire dans U2 est supérieure à 90%.

Partie C

1. Nombre de tirages possibles de 2 boules dans U1 parmi 10 :

$$\binom{10}{2} = 45$$

2. Nombre de tirages avec 1 blanche et 1 noire : On choisit 1 blanche parmi 6 et 1 noire parmi 4 :

$$\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$$

3. On étudie les 3 cas possibles :

- 2 noires tirées, probabilité : $\binom{4}{2} = 6$.

  → U2 contient 3 noires, 3 blanches → P(N2) = 3/6 = 0,5

- 1 noire + 1 blanche, déjà calculé : 24 cas.

  → U2 : 2 noires, 4 blanches → P(N2) = 2/6 = 1/3

- 2 blanches, probabilité : $\binom{6}{2} = 15$

  → U2 : 1 noire, 5 blanches → P(N2) = 1/6

On calcule la probabilité totale pondérée :

$$P(N2) = \frac{6}{45} \cdot \frac{3}{6} + \frac{24}{45} \cdot \frac{1}{3} + \frac{15}{45} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13{,}5}{45} = 0{,}3$$

Conclusion : Dans cette nouvelle expérience, la probabilité de tirer une boule noire dans U2 est 0,30, ce qui est supérieur à 0,28 (valeur de la partie A).

EXERCICE 3 (4 points)

1. On distingue deux cas :

- si n est pair : $u_n = \frac{26}{n}$
- si n est impair : $u_n = \frac{24}{n}$

Donc la suite oscille entre deux suites qui tendent toutes deux vers 0 quand $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Donc la suite admet une limite finie : elle est convergente.

Affirmation 1 : FAUSSE

2. On considère la suite $t_n = \frac{k}{w_n}$, avec $k > 0$

On calcule le terme suivant :

$$t_{n+1} = \frac{k}{w_{n+1}} = \frac{k}{\frac{w_n}{1+w_n}} = k \cdot \frac{1+w_n}{w_n} = k\left(1 + \frac{1}{w_n}\right)$$

Donc :

$$t_{n+1} = k + \frac{k}{w_n} = k + t_n$$

$$\Rightarrow t_{n+1} - t_n = k > 0$$

Donc la suite t_n est arithmétique de raison $k > 0$, donc strictement croissante.

Affirmation 2 : VRAIE

3. La suite v_n est définie par :

$$v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$$

On étudie le sens de variation. On commence par un calcul numérique :

- $v_0 = 1$
- $v_1 = \ln(1+1) = \ln(2) \approx 0{,}693$
- $v_2 = \ln(1+0{,}693) = \ln(1{,}693) \approx 0{,}528$
- $v_3 = \ln(1+0{,}528) \approx \ln(1{,}528) \approx 0{,}424$

On observe que la suite diminue.

Plus rigoureusement, la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est croissante mais toujours inférieure à x pour $x > 0$ (car la droite $y = x$ est au-dessus de la courbe de $\ln(1+x)$).

Donc :

$$v_{n+1} = \ln(1 + v_n) < v_n$$

La suite est strictement décroissante.

Affirmation 3 : VRAIE

4. On utilise une intégration par parties. On pose :

- $u(x) = [\ln(x)]^{n+1}$, donc $u'(x) = \frac{n+1}{x}[\ln(x)]^n$
- $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

On applique cette formule à :

$$I_{n+1} = \int_1^e [\ln(x)]^{n+1}\, dx$$

Cela donne :

$$I_{n+1} = x[\ln(x)]^{n+1}|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{n+1}{x}[\ln(x)]^n\, dx$$

On simplifie :

$$I_{n+1} = e \cdot 1^{n+1} - 1 \cdot 0^{n+1} - (n+1)\int_1^e [\ln(x)]^n\, dx$$

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

L'égalité proposée est donc correcte.

Affirmation 4 : VRAIE

EXERCICE 4 (5 points)

1. Le point A a pour coordonnées $A(1; 2; -1)$ et un vecteur directeur de (d_1) est :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de (d_1) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. On veut démontrer que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires. Pour cela, on montre qu'elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Un vecteur directeur de (d_1) est : $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de (d_2) est : $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On observe que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc, les droites ne sont pas parallèles.

On suppose qu'un point de (d_1) a les mêmes coordonnées qu'un point de (d_2), et on cherche s'il existe un couple de réels (t, s) qui vérifie ce système :

$$\begin{cases} x_{(d_1)} = x_{(d_2)} \Rightarrow 1 + t = 0 \\ y_{(d_1)} = y_{(d_2)} \Rightarrow 2 + 2t = 1 + s \\ z_{(d_1)} = z_{(d_2)} \Rightarrow -1 = 2 + s \end{cases}$$

On résout :

- $1 + t = 0 \Rightarrow t = -1$
- $-1 = 2 + s \Rightarrow s = -3$
- On vérifie avec ces valeurs si la deuxième égalité est satisfaite :

$$2 + 2(-1) = 1 + (-3) \Rightarrow 0 = -2$$

Cette égalité est fausse, donc les droites n'ont aucun point commun : elles ne se coupent pas.

Conclusion : Les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Le plan P passe par le point $A(1; 2; -1)$ et est dirigé par les vecteurs :

$$\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On commence par calculer un vecteur normal au plan P en faisant le produit vectoriel :

$$\vec{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) \\ (0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\ (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Une équation cartésienne du plan est donc de la forme :

$$2(x - 1) - 1(y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

On développe :

$$2x - 2 - y + 2 - 5z - 5 = 0 \Rightarrow 2x - y - 5z - 5 = 0$$

Donc une équation cartésienne du plan est :

$$2x - y - 5z - 5 = 0 \quad \text{ou bien encore} \quad -2x + y + 5z + 5 = 0$$

(les deux équations sont équivalentes : on peut multiplier une équation de plan par -1)

4.a On sait que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires et que la droite (d_1) appartient au plan P. Ainsi, la droite (d_2) n'est pas parallèle au plan P. Par conséquent la droite (d_2) et le plan P sont sécants.

4.b On vérifie que le point $F\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ est bien l'intersection.

Il doit appartenir à (d_2) : on vérifie si on peut écrire ses coordonnées sous la forme :

$$x = 0, \quad y = 1 + s, \quad z = 2 + s$$

On résout :

$$1 + s = -\frac{5}{3} \Rightarrow s = -\frac{8}{3}$$

$$2 + s = -\frac{2}{3} \Rightarrow s = -\frac{8}{3}$$

C'est bien le même s dans les deux cas. Donc F appartient à (d_2)

5.a Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$ lorsque :

- $E \in (d_1), F \in (d_2)$
- la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2)

Ce segment EF réalise bien cette situation car (EF) est sur la droite (δ), qui est orthogonale aux deux droites.

Donc la distance entre les droites (d_1) et (d_2) est égale à la longueur EF

5.b On calcule la distance EF entre :

- $E\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1\right)$
- $F\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On normalise :

$$\| \overrightarrow{EF} \| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

_____

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.