Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2024 Spécialité Mathématiques – Centres Étrangers – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat : www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. La fonction f est définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$$

Pour calculer sa dérivée, on utilise la formule du quotient :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec :

- $u(x) = 0{,}96x \Rightarrow u'(x) = 0{,}96$
- $v(x) = 0{,}93x + 0{,}03 \Rightarrow v'(x) = 0{,}93$

On applique la formule :

$$f'(x) = \frac{0{,}96(0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}96x(0{,}93)}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

On développe le numérateur :

$$0{,}96 \times 0{,}93x + 0{,}96 \times 0{,}03 - 0{,}96x \times 0{,}93 = 0{,}8928x + 0{,}0288 - 0{,}8928x = 0{,}0288$$

Ainsi, on obtient :

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

2. On observe que $f'(x)$ est toujours strictement positif sur $[0; 1]$ car :

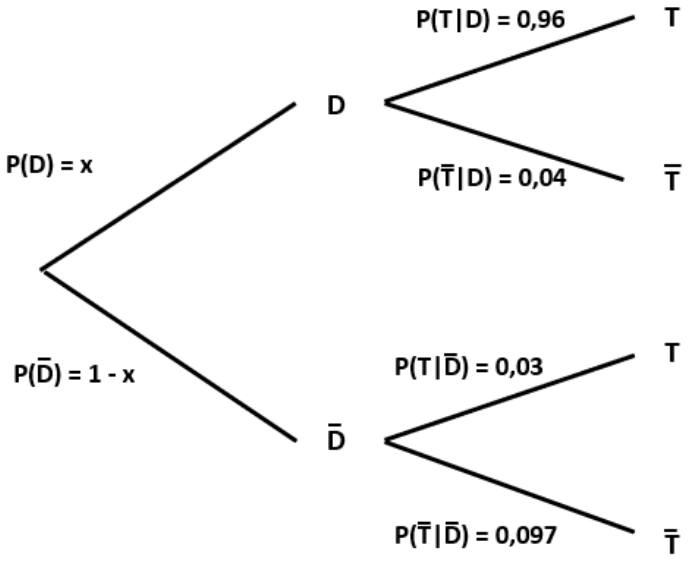
- Le numérateur $0{,}0288$ est strictement positif.
- Le dénominateur $(0{,}93x + 0{,}03)^2$ est strictement positif car il s'agit d'un carré.

Par conséquent, $f'(x) > 0$ pour tout x dans $[0; 1]$.

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

1. L'arbre de probabilité est structuré comme suit :



2. Calcul de la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif :

$$P(D \cap T) = P(D) \times P(T \mid D) = x \times 0{,}96 = 0{,}96x$$

3. Calcul de la probabilité de T :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(D \cap T) + P(T \cap \overline{D}) \\ &= P(D \cap T) + P(\overline{D}) \times P(T \mid \overline{D}) \\ &= 0{,}96x + (1 - x)0{,}03 \\ &= 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x \\ &= 0{,}93x + 0{,}03 \end{aligned}$$

4. La probabilité conditionnelle est donnée par :

$$P(D \mid T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

En utilisant les résultats précédents avec $x = 0{,}05$:

$$P(D \mid T) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03}$$

Cela correspond exactement à $f(0{,}05)$, d'après la fonction définie en Partie A.
On fait le calcul :

$$f(0{,}05) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0465 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0765} \approx 0{,}63$$

Donc :

$$P(D \mid T) \approx 0{,}63$$

5. a. On cherche x tel que :

$$P(D \mid T) \geq 0{,}9$$

$$\frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \geq 0{,}9$$

En multipliant des deux côtés par $(0{,}93x + 0{,}03)$:

$$0{,}96x \geq 0{,}9(0{,}93x + 0{,}03)$$

$$0{,}96x \geq 0{,}837x + 0{,}027$$

$$0{,}96x - 0{,}837x \geq 0{,}027$$

$$0{,}123x \geq 0{,}027$$

$$x \geq \frac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}22$$

Donc, il faut que x soit au moins 0,22 (arrondi au centième).

b. Si seuls les sportifs les plus performants sont testés, on suppose que ces sportifs ont une proportion x de dopage plus élevée que l'ensemble des sportifs.

Comme la fonction $f(x)$ est croissante, cela signifie que la valeur prédictive positive du test $P(D \mid T)$ augmente.

Ainsi, cibler les sportifs les plus performants augmente la fiabilité du test, car il y a plus de chances qu'un test positif corresponde à un sportif réellement dopé.

EXERCICE 2 (5 points)

1. a. On cherche les solutions de l'équation :

$$2xe^{-x} = x$$

Si $x = 0$, on a $2 \times 0 \times e^0 = 0$, donc $x = 0$ est solution.

Pour $x \neq 0$, on peut diviser par x et on obtient :

$$2e^{-x} = 1$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$-x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \ln(2)$$

Les solutions sont donc :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \ln(2)$$

b. On dérive $f(x) = 2xe^{-x}$ en utilisant la formule du produit :

$$f'(x) = 2e^{-x} + 2x(-e^{-x})$$

$$f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$$

c. Le signe de $f'(x)$ dépend de $1 - x$:

- Si $x < 1$ alors $f'(x) > 0$ donc f est croissante.
- Si $x > 1$ alors $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.
- Pour $x = 1$, $f'(1) = 0$, donc f atteint un maximum en $x = 1$.

Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1} \approx 0{,}7$$

Tableau de variations :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	↗	$2e^{-1}$

2. a. Montrons que $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ par récurrence

- <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$

  $$u_0 = 0{,}1$$

  $$u_1 = f(u_0) = f(0{,}1) \approx 0{,}18$$

  On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$
- <u>Hérédité</u> : Supposons $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$
  - Comme $f(x)$ est croissante sur $[0; 1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est toujours plus grand que u_n.
  - Comme $f(x) \leq 1$ pour $x \in [0; 1]$, on a $u_{n+1} \leq 1$.
- <u>Conclusion</u> : Par récurrence, la suite est bien croissante et bornée.

b. Une suite croissante et majorée converge.
Donc (u_n) converge.

3. La suite (u_n) converge vers une limite ℓ, qui vérifie :

$$\ell = f(\ell)$$

$$\ell = 2\ell e^{-\ell}$$

Si $\ell \neq 0$, on divise par ℓ et on retrouve :

$$2e^{-\ell} = 1$$

$$e^{-\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\ell = \ln(2)$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\ln(2)$.

4. a. Montrons que $\ln(2) - u_n \geq 0$

On sait que la suite est croissante et bornée par $\ln(2)$, donc :

$$u_n \leq \ln(2)$$

$$\ln(2) - u_n \geq 0$$

b. On veut un script qui calcule u_n jusqu'à ce que u_n soit proche de $\ln(2)$ à 10^{-4} près.

Voici le script complété :

```
from math import log, exp

def seuil():
    n = 0
    u = 0.1
    while log(2) - u > 0.0001:  #Tant que la précision n'est pas atteinte
        n = n + 1
        u = 2 * u * exp(-u)  #Mise à jour de u_n
    return (u, n)
```

Note : Le sujet comporte une erreur avec un appel à la fonction « ln(2) » qui n'existe pas sous Python. Nous avons corrigé avec la bonne écriture « log(2) ».

c. En exécutant le programme, on trouve que la valeur de n est 11.

EXERCICE 3 (5 points)

1. On cherche les fonctions y qui vérifient :

$$y' = y$$

Si y est une solution constante, alors sa dérivée est nulle :

$$y' = 0$$

$$0 = y$$

La seule solution constante est donc :

$$y = 0$$

2. L'équation différentielle est une équation classique de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$.
La solution générale est donnée par :

$$y(x) = Ce^x$$

où C est une constante réelle.

3. On cherche à résoudre l'équation différentielle (E): $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$

On calcule la dérivée de $h(x)$:

$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$$

On vérifie si cette fonction satisfait (E) :

$$h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x) + \cos(x) = \big(2\cos(x) + \sin(x)\big) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x) + \cos(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x) + \cos(x) = \cos(x) - 2\sin(x) = h'(x)$$

On obtient bien une égalité, donc $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$ est bien une solution particulière.

4. On considère une fonction $f(x)$ solution de (E).
On pose $j(x) = f(x) - h(x)$, alors :

$$j'(x) = f'(x) - h'(x)$$

Or, d'après (E) :

$$f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

et on sait que :

$$h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

Ainsi :

$$j'(x) = f'(x) - h'(x) = \big(f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\big) - \big(h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\big)$$

$$j'(x) = f(x) - h(x)$$

$$j'(x) = j(x)$$

On retrouve bien l'équation $j'(x) = j(x)$.

5. L'équation $j'(x) = j(x)$ a pour solution générale :

$$j(x) = Ce^x$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = h(x) + j(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + Ce^x$$

6. On impose $g(0) = 0$:

$$2\cos(0) + \sin(0) + Ce^0 = 0$$

$$2 \times 1 + 0 + C \times 1 = 0$$

$$2 + C = 0$$

$$C = -2$$

La solution particulière vérifiant $g(0) = 0$ est donc :

$$g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - 2e^x$$

7. On réalise le calcul :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\big)\, dx$$

$$= \left[-2e^x - \cos(x) + 2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Evaluation des bornes :

- Pour $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2$$

- Pour $x = 0$:

$$-2e^0 - \cos(0) + 2\sin(0) = -2 \times 1 - 1 + 2 \times 0 = -2 - 1 = -3$$

Donc :

$$I = \left(-2e^{\frac{\pi}{2}} + 2\right) - (-3)$$

$$= -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = 5 - 2e^{\frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. On calcule les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les points A, B, C sont alignés si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \vec{AC} = k\vec{AB}$$

On regarde les coordonnées :

$$3 = k \times 1, \quad -1 = k \times 3, \quad 0 = k \times (-2)$$

La dernière équation donne $k = 0$, ce qui est incohérent avec $k = \frac{3}{1} = 3$ dans la première.
Donc, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, et les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. a. Le vecteur normal au plan doit être orthogonal aux vecteurs directeurs du plan. On calcule les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) = 1 + 9 - 10 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 3 + 3 \times (-1) + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, donc il est normal au plan (ABC).

b. Une équation cartésienne d'un plan ayant pour vecteur normal (a, b, c) et passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ est de la forme :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

On remplace par $\vec{n}(1,3,5)$ et $A(-2,0,2)$ et on obtient :

$$1(x + 2) + 3(y - 0) + 5(z - 2) = 0$$

$$x + 2 + 3y + 5z - 10 = 0$$

$$x + 3y + 5z - 8 = 0$$

L'équation du plan (ABC) est donc :

$$x + 3y + 5z = 8$$

c. Le point $D(0,0,3)$ appartient-il au plan ?
On teste son appartenance en remplaçant dans l'équation du plan :

$$0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 = 15 \neq 8$$

Le point D n'appartient pas au plan (ABC), donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

3. a. La droite $\mathcal{D}_1$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

Le vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{n} = (1,3,5)$, qui est orthogonal au plan (ABC) d'après la question 2)a).

Pour $t = 0$, on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 = 3 \end{cases}$$

On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.

Par conséquent, $\mathcal{D}_1$ est bien une hauteur du tétraèdre issue de D.

b. On résout le système $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$:

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 5 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s = 1 + 3 \times {}^{-2}/_{7} = {}^{1}/_{7} \\ s = {}^{-4}/_{14} = {}^{-2}/_{7} \\ s = {}^{-6}/_{21} = {}^{-2}/_{7} \end{cases}$$

Il y a une seule solution au système, donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

On cherche les coordonnées du point d'intersection en remplaçant t par ${}^{1}/_{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$:

$$\begin{cases} x = {}^{1}/_{7} \\ y = 3 \times {}^{1}/_{7} = {}^{3}/_{7} \\ z = 3 + 5 \times {}^{1}/_{7} = {}^{26}/_{7} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{26}{7}\right)$.

4. a. Avec les questions précédentes, on sait que H est donc à l'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ avec le plan (ABC), et que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

Les coordonnées du point H doivent donc vérifier l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

Ainsi :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ x + 3y + 5z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ 35t = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t = {}^{-1}/_{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = {}^{-1}/_{5} \\ y = {}^{-3}/_{5} \\ z = 2 \\ t = {}^{-1}/_{5} \end{cases}$$

Donc H a pour coordonnées :

$$H\left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 2\right)$$

b. Puisque H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), alors la distance du point D au plan (ABC) est la longueur DH.

$$\mathrm{DH}^2 = \left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2-3)^2 = \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1 = \frac{35}{25}$$

Donc :

$$\mathrm{DH} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1{,}18$$

———

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.