Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du bac général 2026
Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

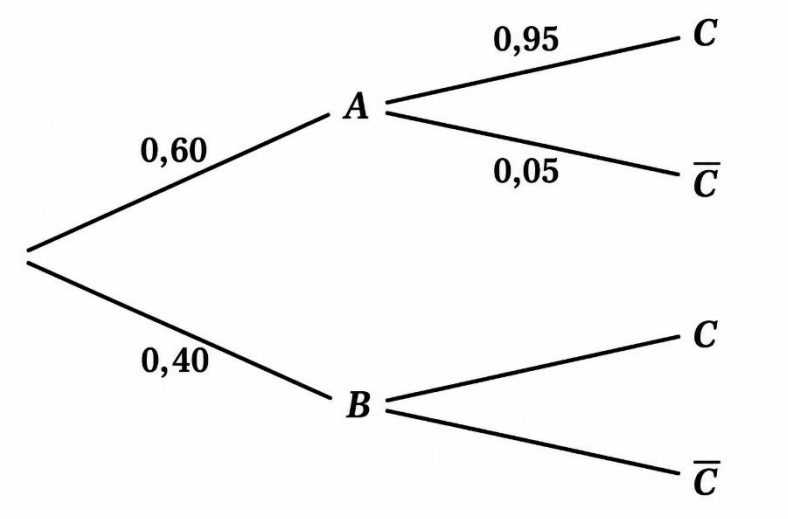
1. On connaît directement :

$$P(A) = 0{,}60 \qquad \text{et} \qquad P(B) = 0{,}40$$

Parmi les tomates du fournisseur A :

$$P_A(C) = 0{,}95 \qquad \text{et} \qquad P_A(\overline{C}) = 0{,}05$$

Ce qui donne l'arbre complété suivant :



2. a. On cherche la probabilité que la tomate soit à la fois commercialisable et issue du fournisseur A.

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C)$$

$$P(A \cap C) = 0{,}60 \times 0{,}95 = 0{,}57$$

La probabilité cherchée est donc égale à 0,57.

2. b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

Or :

$$P(C) = 0{,}91$$

et :

$$P(A \cap C) = 0{,}57$$

Donc :

$$0{,}91 = 0{,}57 + P(B) \times P_B(C)$$

$$0{,}91 = 0{,}57 + 0{,}40 \times P_B(C)$$

$$0{,}34 = 0{,}40 \times P_B(C)$$

$$P_B(C) = \frac{0{,}34}{0{,}40} = 0{,}85$$

Ainsi :

$$P_B(C) = 0{,}85$$

2. c. On cherche si, sachant que la tomate est non commercialisable, elle a deux fois moins de chance de provenir de A que de B.

On calcule d'abord les probabilités :

$$P(A \cap \overline{C}) = P(A) \times P_A(\overline{C}) = 0{,}60 \times 0{,}05 = 0{,}03$$

et :

$$P(B \cap \overline{C}) = P(B) \times P_B(\overline{C}) = 0{,}40 \times 0{,}15 = 0{,}06$$

On sait aussi que :

$$P(\overline{C}) = 1 - 0{,}91 = 0{,}09$$

Donc :

$$P_{\overline{C}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0{,}03}{0{,}09} = \frac{1}{3}$$

et :

$$P_{\overline{C}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0{,}06}{0{,}09} = \frac{2}{3}$$

On a bien :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

Le responsable des achats a donc raison.

Partie B

1. a. Chaque tomate a une probabilité 0,09 d'être non commercialisable. On prélève 15 tomates de manière indépendante.

Ainsi, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 15 \qquad \text{et} \qquad p = 0{,}09$$

On peut écrire :

$$X \sim \mathcal{B}(15\,;\,0{,}09)$$

1. b. On cherche :

$$P(X = 2)$$

Avec la formule de la loi binomiale :

$$P(X = 2) = \binom{15}{2} \times 0{,}09^2 \times 0{,}91^{13} \approx 0{,}249581$$

Arrondie au millième, la probabilité vaut :

$$P(X = 2) \approx 0{,}250$$

1. c. On cherche :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = 0{,}91^{15} + \binom{15}{1} \times 0{,}09 \times 0{,}91^{14} + \binom{15}{2} \times 0{,}09^2 \times 0{,}91^{13} \approx 0{,}853096$$

Arrondie au millième :

$$P(X \leq 2) \approx 0{,}853$$

2. a. On a :

$$F_n = \frac{X_n}{n}$$

Comme X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0{,}09$, on sait que :

$$E(X_n) = 0{,}09n$$

et :

$$V(X_n) = n \times 0{,}09 \times (1 - 0{,}09) = 0{,}0819n$$

Donc :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{E(X_n)}{n} = \frac{0{,}09n}{n} = 0{,}09$$

Pour la variance :

$$V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{0{,}0819n}{n^2} = \frac{0{,}0819}{n}$$

2. b. L'inégalité :

$$0{,}04 < F_n < 0{,}14$$

revient à dire que F_n est à moins de $0{,}05$ de son espérance $0{,}09$:

$$|F_n - 0{,}09| < 0{,}05$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}05^2}$$

Or on a vu que :

$$E(F_n) = 0{,}09 \qquad \text{et} \qquad V(F_n) = \frac{0{,}0819}{n}$$

Donc :

$$P(|F_n - 0{,}09| \geq 0{,}05) \leq \frac{\frac{0{,}0819}{n}}{0{,}0025}$$

$$P(|F_n - 0{,}09| \geq 0{,}05) \leq \frac{32{,}76}{n}$$

En passant à l'évènement contraire :

$$P(|F_n - 0{,}09| < 0{,}05) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$$

Ainsi :

$$P(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$$

L'inégalité demandée avec le signe strict est donc obtenue dans le cadre de cette estimation probabiliste.

2. c. On a un échantillon de 500 tomates : $n = 500$.

Le responsable observe 55 tomates non commercialisables, donc la fréquence observée est :

$$f = \frac{55}{500} = 0{,}11$$

On compare cette fréquence à l'intervalle étudié dans la question précédente :

$$0{,}04 < 0{,}11 < 0{,}14$$

De plus, pour $n = 500$:

$$1 - \frac{32{,}76}{500} = 0{,}93448$$

La probabilité que la fréquence de tomates non commercialisables soit comprise entre $0{,}04$ et $0{,}14$ est donc supérieure à environ $0{,}934$.

La fréquence observée $0{,}11$ appartient à cet intervalle. Le résultat est donc conforme à ce que le responsable pouvait attendre.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1. On résout :

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x$$

On regroupe tout dans un même membre :

$$x\left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 0$$

Donc :

$$x = 0$$

ou bien :

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

Comme la racine carrée est positive :

$$\sqrt{1+x^2} = 2$$

$$1 + x^2 = 4$$

$$x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{3}$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$\{-\sqrt{3}\,;\ 0\,;\ \sqrt{3}\}$$

2. a. On écrit :

$$f(x) = 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$f'(x) = 2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

On met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

2. b. Pour tout réel x, on a :

$$1+x^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x^2} > 0$$

Donc :

$$(1+x^2)\sqrt{1+x^2} > 0$$

Ainsi :

$$f'(x) > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. On va montrer la propriété suivante avec un raisonnement par réuccurence.

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

Initialisation :

On a :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Donc :

$$1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

On suppose que, pour un certain entier naturel n, on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

Il suffit alors de montrer que :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$$

Comme $u_{n+1} \in [1; \sqrt{3}[$, on a déjà :

$$1 \leq u_{n+1}$$

De plus, sur l'intervalle $[1; \sqrt{3}]$, on a pour tout $x > 0$:

$$f(x) \geq x$$

En effet :

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \geq x$$

équivaut, puisque $x > 0$, à :

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 3$$

Donc :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq u_{n+1}$$

Enfin, comme f est strictement croissante et que $u_{n+1} < \sqrt{3}$, on obtient :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$$

Or :

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Donc :

$$u_{n+2} < \sqrt{3}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$$

2. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$. Elle est donc convergente. On note ℓ sa limite.

Comme $u_n \geq 1$, on a :

$$\ell \geq 1$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite dans la relation :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On obtient :

$$\ell = f(\ell)$$

D'après la partie A, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont :

$$\{-\sqrt{3}\,;\ 0\,;\ \sqrt{3}\}$$

Comme $\ell \geq 1$, la seule limite possible est :

$$\ell = \sqrt{3}$$

La suite (u_n) converge donc vers $\sqrt{3}$.

3. a. On commence par calculer u_{n+1}^2 :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$$

Donc :

$$u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}$$

Alors :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} = \frac{\dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}}$$

On simplifie le dénominateur :

$$3-\frac{4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3(1+u_n^2)-4u_n^2}{1+u_n^2} = \frac{3-u_n^2}{1+u_n^2}$$

Donc :

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{\dfrac{3-u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3-u_n^2} = 4v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4.

Son premier terme est :

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

3. b. Comme (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $\frac{1}{2}$, on a :

$$v_n = \frac{1}{2} \times 4^n$$

Or :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

Donc :

$$\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = \frac{1}{2} \times 4^n$$

On résout cette équation pour obtenir u_n^2 :

$$u_n^2 = \left(\frac{1}{2} \times 4^n\right)(3 - u_n^2)$$

$$u_n^2 = \frac{3}{2} \times 4^n - \frac{1}{2} \times 4^n u_n^2$$

$$u_n^2 \left(1 + \frac{1}{2} \times 4^n\right) = \frac{3}{2} \times 4^n$$

$$u_n^2 = \frac{1{,}5 \times 4^n}{1 + 0{,}5 \times 4^n}$$

Comme $u_n > 0$, on obtient :

$$u_n = \sqrt{\frac{1{,}5 \times 4^n}{1 + 0{,}5 \times 4^n}}$$

3. c. D'après la question précédente :

$$u_n^2 = \frac{1{,}5 \times 4^n}{1 + 0{,}5 \times 4^n}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par 4^n, on obtient :

$$u_n^2 = \frac{1{,}5}{\frac{1}{4^n} + 0{,}5}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{4^n} \to 0$$

Donc :

$$u_n^2 \to \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$$

Comme $u_n > 0$, on en déduit :

$$u_n \to \sqrt{3}$$

On retrouve bien le résultat de la question 2.

Partie C

1. Le script complété est :

```
from math import *

def termes(p) :
    u = 1
    S = 0
    L = [ ]
    for i in range(p):
        S = S + u**2
        u = 2*u / sqrt(1 + u**2)
        L.append(S)
    return L
```

À chaque passage dans la boucle, on ajoute le terme u_i^2 à la somme, puis on calcule le terme suivant de la suite (u_n).

2. On sait que, pour tout entier naturel k :

$$1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$$

En élevant au carré, comme les termes sont positifs :

$$1 \leq u_k^2 \leq 3$$

Or :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2$$

Cette somme contient n termes, chacun compris entre 1 et 3. Donc :

$$n \leq S_n \leq 3n$$

3. Comme :

$$n \leq S_n \qquad \text{et} \qquad n \to +\infty$$

on obtient par comparaison :

$$S_n \to +\infty$$

Ensuite, à partir de :

$$n \leq S_n \leq 3n$$

on divise par $n^2 > 0$:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}$$

Or :

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{n} \to 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{S_n}{n^2} \to 0$$

EXERCICE 3 (5 points)

1. La droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Pour $t = 0$, on obtient :

$$(1; 1; 1)$$

Donc la droite Δ passe bien par le point C.

Vérifions si elle passe par $A(4; 2; 2)$.

Il faudrait avoir :

$$1 + 2t = 4$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

Mais alors :

$$1 + t = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Or $\frac{5}{2} \neq 2$. Les coordonnées ne correspondent donc pas toutes au même paramètre t.

La droite Δ ne passe donc pas par A.

2. a. La droite Δ a pour vecteur directeur :

$$\vec{u} = (2; 1; 2)$$

Comme le plan P est perpendiculaire à Δ, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P.

Une équation cartésienne de P est donc de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0$$

Le plan passe par $A(4; 2; 2)$, donc :

$$2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0$$

$$8 + 2 + 4 + d = 0$$

$$d = -14$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan P est :

$$2x + y + 2z - 14 = 0$$

2. b. Pour le point $B(5; -2; 3)$, on calcule :

$$2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0$$

Donc B appartient au plan P.

Pour le point $C(1; 1; 1)$, on calcule :

$$2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = 2 + 1 + 2 - 14 = -9$$

Comme $-9 \neq 0$, le point C n'appartient pas au plan P.

3. a. On vérifie d'abord que $D(3; 2; 3)$ appartient au plan P :

$$2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 6 + 2 + 6 - 14 = 0$$

Donc $D \in P$.

Ensuite, on calcule :

$$\overrightarrow{CD} = (3 - 1; 2 - 1; 3 - 1) = (2; 1; 2)$$

Or $(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan P. Donc la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

Comme D appartient au plan P et que (CD) est perpendiculaire à P, le point D est bien le projeté orthogonal de C sur le plan P.

3. b. D'après les questions précédentes, on sait que les points A, B et D appartiennent tous au plan P.

Vérifions qu'ils ne sont pas alignés. On a :

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 4; -2 - 2; 3 - 2) = (1; -4; 1)$$

et :

$$\overrightarrow{AD} = (3 - 4; 2 - 2; 3 - 2) = (-1; 0; 1)$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B et D définissent le plan P.

Or, d'après la question précédente, le point C n'appartient pas au plan P. Les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.

3. c. On utilise :

$$\overrightarrow{AB} = (1; -4; 1) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AD} = (-1; 0; 1)$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

3. d. Puisque :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

On peut prendre le triangle ABD comme base du tétraèdre. Son aire vaut :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times AD$$

Or :

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

et :

$$AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Donc :

$$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$$

La hauteur relative à cette base est la distance de C au plan P. Comme D est le projeté orthogonal de C sur P, cette hauteur est CD.

$$CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABD} \times CD = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3$$

4. a. On veut vérifier que le point

$$H\left(\frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29}\right)$$

est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

On calcule d'abord :

$$\overrightarrow{BC} = (1-5; 1-(-2); 1-3) = (-4; 3; -2)$$

Puis :

$$\overrightarrow{BH} = \left(\frac{73}{29} - 5; -\frac{4}{29} + 2; \frac{51}{29} - 3\right) = \left(-\frac{72}{29}; \frac{54}{29}; -\frac{36}{29}\right)$$

On remarque que :

$$\overrightarrow{BH} = \frac{18}{29}\overrightarrow{BC}$$

Donc H appartient à la droite (BC).

Il reste à vérifier que (AH) est perpendiculaire à (BC). On calcule :

$$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{73}{29} - 4; -\frac{4}{29} - 2; \frac{51}{29} - 2\right) = \left(-\frac{43}{29}; -\frac{62}{29}; -\frac{7}{29}\right)$$

Alors :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{43}{29}\right) \times (-4) + \left(-\frac{62}{29}\right) \times 3 + \left(-\frac{7}{29}\right) \times (-2) = \frac{172 - 186 + 14}{29} = 0$$

Donc (AH) est perpendiculaire à (BC).

Ainsi, H est bien le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

4. b. L'aire du triangle ABC peut se calculer en prenant BC comme base et AH comme hauteur.

On a :

$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

Calculons AH :

$$AH = \sqrt{\left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(-\frac{62}{29}\right)^2 + \left(-\frac{7}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{43^2 + 62^2 + 7^2}}{29} = \frac{\sqrt{5742}}{29}$$

Or :

$$5742 = 29 \times 198 = 29 \times 9 \times 22$$

Donc :

$$AH = \frac{3\sqrt{29 \times 22}}{29} = \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}$$

Ainsi :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{22}}{2}$$

4. c. On utilise à nouveau la formule du volume d'un tétraèdre, cette fois avec le triangle ABC comme base.

On note d la distance du point D au plan (ABC). Alors :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d$$

On sait que :

$$V = 3 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{22}}{2}$$

Donc :

$$3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times d$$

$$3 = \frac{\sqrt{22}}{2} d$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{22}}$$

En rationalisant :

$$d = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

La distance du point D au plan (ABC) est donc :

$$\frac{3\sqrt{22}}{11}$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$x \to +\infty \qquad \text{et} \qquad (\ln x)^2 \to +\infty$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. a. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}\ \ln(\sqrt{x})$$

Or :

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$$

Donc :

$$g(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln x$$

$$4\big(g(\sqrt{x})\big)^2 = 4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\ln x\right)^2$$

$$4\big(g(\sqrt{x})\big)^2 = 4 \times \frac{x}{4}(\ln x)^2$$

$$4\big(g(\sqrt{x})\big)^2 = x\,(\ln x)^2$$

Ainsi, on trouve bien :

$$f(x) = 4\big(g(\sqrt{x})\big)^2$$

2. b. D'après les croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$$

Par ailleurs, lorsque x tend vers 0^+, alors $\sqrt{x}$ tend vers 0^+.

Donc par composition :

$$\lim_{x\to 0^+} g\big(\sqrt{x}\big) = 0$$

Or, d'après la question précédente, on a :

$$f(x) = 4\big(g(\sqrt{x})\big)^2$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

3. a. Pour $x > 0$, on dérive :

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

On utilise la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times 2\ln x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$$

$$f'(x) = (\ln x)(\ln x + 2)$$

3. b. On étudie le signe de :

$$f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$$

Les deux facteurs s'annulent lorsque :

$$\ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

et lorsque :

$$2 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-2}$$

On obtient alors le signe suivant :

$$f'(x) > 0 \quad \text{sur }]0; e^{-2}[$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{sur }]e^{-2}; 1[$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{sur }]1; +\infty[$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur $]0; e^{-2}]$, décroissante sur $[e^{-2}; 1]$, puis croissante sur $[1; +\infty[$.

On peut aussi préciser les valeurs utiles :

$$f(e^{-2}) = e^{-2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}$$

et :

$$f(1) = 1 \times 0^2 = 0$$

On obtient le tableau de variations complet :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$

3. c. Sur l'intervalle $]0;1]$, la fonction f est croissante sur $]0;e^{-2}]$, puis décroissante sur $[e^{-2};1]$.

Son maximum est donc atteint en :

$$x = e^{-2}$$

La valeur exacte de ce maximum est :

$$f(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}$$

4. a. Sur $]0;1]$, le maximum de f est :

$$\frac{4}{e^2}$$

Or :

$$\frac{4}{e^2} < 2$$

Donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $]0;1]$.

Sur $[1;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus :

$$f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Comme 2 est compris entre 0 et $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution sur $[1;+\infty[$.

Comme f est strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.

L'équation $f(x) = 2$ admet donc une unique solution sur $]0;+\infty[$. On la note α.

4. b. On calcule :

$$f(2{,}4) = 2{,}4\,(\ln(2{,}4))^2 \approx 1{,}840$$

et :

$$f(2{,}5) = 2{,}5\,(\ln(2{,}5))^2 \approx 2{,}099$$

Donc :

$$f(2{,}4) < 2 < f(2{,}5)$$

Comme f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, on en déduit :

$$2{,}4 < \alpha < 2{,}5$$

C'est un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.

5. a. Sur l'intervalle $]0;1]$, on a :

$$f(x) = x\,(\ln x)^2 \geq 0$$

Donc l'intégrale :

$$\int_a^1 f\,(x)\,dx$$

représente l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

5. b.

Attention ! L'énoncé comporte une erreur dans le résultat à trouver.
Le résultat de l'intégration par parties sans erreur est :

$$\int_a^1 f\,(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{a}} x \ln x\,dx$$

ou, de manière équivalente :

$$\int_a^1 f\,(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_{\boldsymbol{a}}^{\mathbf{1}} x \ln x\,dx$$

On réalise le calcul :

$$\int_a^1 x\,(\ln x)^2\,dx$$

On effectue une intégration par parties avec :

$$u(x) = (\ln x)^2 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = x$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{2\ln x}{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_a^1 x\,(\ln x)^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2\ln x}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_a^1 - \int_a^1 x \ln x\,dx$$

Or :

$$\ln 1 = 0$$

Donc :

$$\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_a^1 = \frac{1^2}{2}(\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2}(\ln a)^2 = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2$$

Ainsi :

$$\int_a^1 f(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x\,dx$$

5. c. On calcule maintenant :

$$\int_a^1 x \ln x\,dx$$

On effectue une nouvelle intégration par parties avec :

$$u(x) = \ln x \qquad \text{et} \qquad v'(x) = x$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Donc :

$$\int_a^1 x \ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_a^1 x \ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2}\,dx$$

Comme $\ln 1 = 0$, on a :

$$\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_a^1 = -\frac{a^2}{2}\ln a$$

et :

$$\int_a^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_a^1 = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

Donc :

$$\int_a^1 x \ln x\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

En remplaçant dans le résultat de la question précédente :

$$\int_a^1 f\,(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$$

$$\int_a^1 f\,(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

5. d. Lorsque a tend vers 0^+, on utilise les limites classiques :

$$a^2(\ln a)^2 \to 0 \qquad \text{et} \qquad a^2 \ln a \to 0$$

De plus :

$$a^2 \to 0$$

Donc, à partir de la formule précédente :

$$\int_a^1 f\,(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

on obtient :

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f\,(x)\,dx = -\frac{0}{2} + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

———

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.