Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

EXERCICE 1 : Commun à tous les candidats (10 points)

Préparation d'une bière brune aromatisée

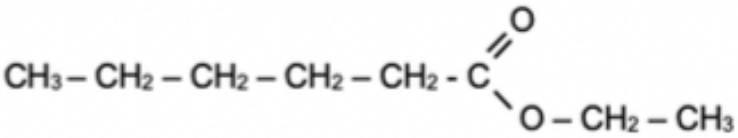
Depuis l'antiquité, les bières sont produites selon le même procèdé à partir de quatre constituants : l'eau, le malt, le houblon et les levures. L'origine des ingrédients et les

Entre 250 et 300 espèces chimiques présentes dans la bière proviennent des huiles essentielles du houblon, parmi lesquelles plus de 60 esters différents dont les plus importants sont l'acétate d'éthyle, l'acétate d'isoamyle, l'acétate d'isobutyle, l'acétate de phényle, l'hexanoate d'éthyle et le caprylate d'éthyle.

Afin d'intensifier la saveur fruitée d'une bière, on peut rajouter, en fin de fabrication, un ester dont la réaction de synthèse va être étudiée dans un premier temps **(partie 1)**. La qualité de l'eau utilisée entant très importante dans la fabrication de la bière, l'analyse d'une eau de brassage sera effectuée dans un second temps **(partie 2)**.

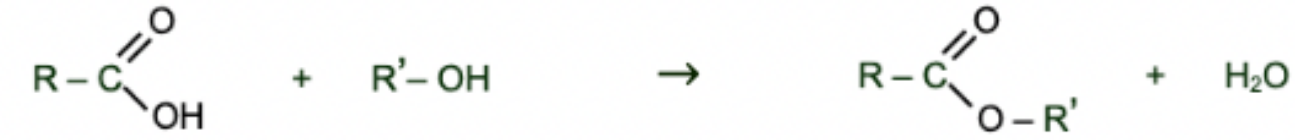
Partie 1 – Synthèse d'un ester au laboratoire

L'ester, noté E, dont la formule semi-développée est représentée ci-après, permet d'obtenir un arome de fruits rouges qui peut servir pour intensifier le goût d'une bière.



Ester E

Cet ester peut être synthétisé au laboratoire à partir d'un acide carboxylique et d'un alcool. La réaction modélisant cette synthèse est appelée réaction d'estérification. L'équation de la réaction d'estérification, écrite dans le cas général avec R et R' chaines carbonées, est la suivante :



Acide carboxylique | Alcool | Ester | Eau

Données

- Préfixes utilisés dans les règles de nomenclature

Nombre d'atomes de carbone	1	2	3	4	5	6	7	8
Préfixe	méth-	éth-	prop-	but-	pent-	hex-	hept-	oct-

- Masse volumique ρ (en $g \cdot cm^{-3}$) à 25 °C

acide carboxylique A	alcool B
0,930	0,789

- Masse molaire (en $g \cdot mol^{-1}$)

Acide A	Alcool B	Ester noté E
116,2	46,1	144,2

- Extrait d'une table de spectroscopie infrarouge

Liaison	Nombre d'onde (cm^{-1})	Intensité
O-H alcool libre	3500 – 3700	forte, fine
O-H alcool lié	3200 – 3400	forte, large
O-H acide carboxylique	2500 – 3200	forte à moyenne, large
C_{tri} - H	3000 – 3100	Moyenne
$C_{tét}$ - H	2800 – 3000	Forte
C = O	1680 – 1740	Forte

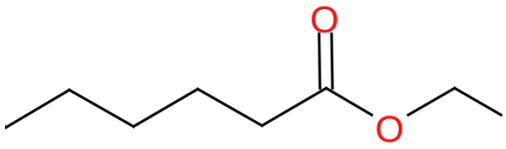
Remarques :

C_{tri} signifie que l'atome de carbone est trigonal, c'est-à-dire relié à trois voisins.

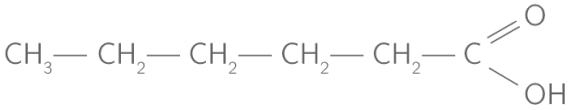
$C_{tét}$ signifie que l'atome de carbone est tétragonal, c'est-à-dire relié à quatre voisins.

1. **Nommer l'ester E et représenter sa formule topologique**

Hexanoate d'éthyle



2. **Écrire les formules semi-développées de l'acide carboxylique A et de l'alcool B intervenant dans la synthèse de l'ester E et nommer chacun d'entre eux.**



Acide hexanoïque



Éthanol

Pour obtenir l'ester E, on chauffe à reflux un volume $V_{alcool} = 20{,}0\ mL$ avec un volume d'acide carboxylique $V_{acide} = 43{,}0\ mL$, en présence d'acide sulfurique. On obtient, après séparation, rinçage et séchage, une masse $m_E = 33{,}1\ g$ d'ester E.

3. **Justifier le double intérêt d'un chauffage à reflux**

Le chauffage à reflux permet d'accélérer la réaction tout en évitant la surpression dans le ballon et sans perdre de produit.

4. **L'acide sulfurique joue le rôle de catalyseur lors de cette synthèse. Citer la définition d'un catalyseur.**

Un catalyseur est une espèce chimique qui accélère une réaction chimique sans intervenir dans l'équation bilan de celle-ci.

5. **Montrer que les réactifs sont dans des proportions pratiquement stœchiométriques et déterminer la valeur du rendement de cette synthèse.**

On calcul la quantité de matière initiale de chaque réactif :

➔ **Acide hexanoïque :**

$\rho_A = 0{,}930\ g.cm^{-3} = 0{,}930\ g.mL^{-1}$; $M_A = 116{,}2\ g.mol^{-1}$; $V_A = 43{,}0\ mL$

Soit, $n_A = \frac{m_A}{M_A} = \frac{\rho_A * V_A}{M_A} = \frac{0{,}930*43{,}0}{116{,}2} = 3{,}44 * 10^{-1}\ mol$

➔ **Ethanol :**

$\rho_B = 0{,}789\ g.cm^{-3} = 0{,}789\ g.mL^{-1}$; $M_B = 46{,}1\ g.mol^{-1}$; $V_B = 20{,}0\ mL$

Soit, $n_B = \frac{m_B}{M_B} = \frac{\rho_B * V_B}{M_B} = \frac{0{,}789*20{,}0}{46{,}1} = 3{,}42 * 10^{-1}\ mol$

Si on garde seulement 2 chiffres significatifs : $n_A = n_B = 3{,}4 * 10^{-1}\ mol$

On calcul ensuite le rendement : $\eta = \frac{n_{synthèse}}{n_{théorique}} = \frac{\frac{m_E}{M_E}}{n_A} = \frac{\frac{33{,}1}{144{,}2}}{3{,}4*10^{-1}} = 6{,}8 * 10^{-1}$. Soit, 68%.

Pour améliorer le rendement de la synthèse, on réalise trois synthèses en faisant varier différents paramètres expérimentaux. Pour chaque synthèse, un suivi temporel de la concentration en acide carboxylique est réalisé par titrage. Ce suivi conduit aux traces des courbes représentant l'évolution de la concentration de l'acide carboxylique en fonction du temps (figure 1).

	Volume d'acide	Volume d'alcool	Catalyseur	Température
Synthèse 1	43 mL	20 mL	Oui	50 °C
Synthèse 2	43 mL	25 mL	Oui	50 °C
Synthèse 3	43 mL	20 mL	Oui	70 °C

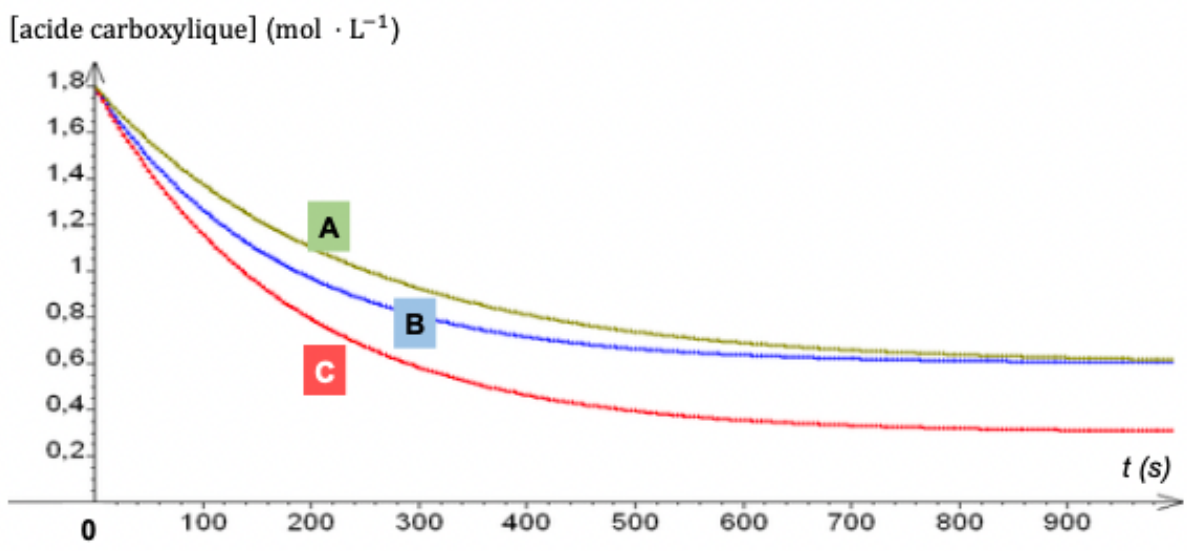


figure 1 : évolutions temporelles de la concentration en acide carboxylique

6. **Identifier les conditions expérimentales, en précisant le numéro de la synthèse, pour lesquelles le rendement de la réaction d'estérification est amélioré. Préciser la courbe associée.**

Le rendement le plus élevée sera celui de la synthèse 2 car il y a un des réactif qui est en excès. C'est la courbe C car c'est celle pour laquelle la plus grande quantité de réactif a réagi à la fin.

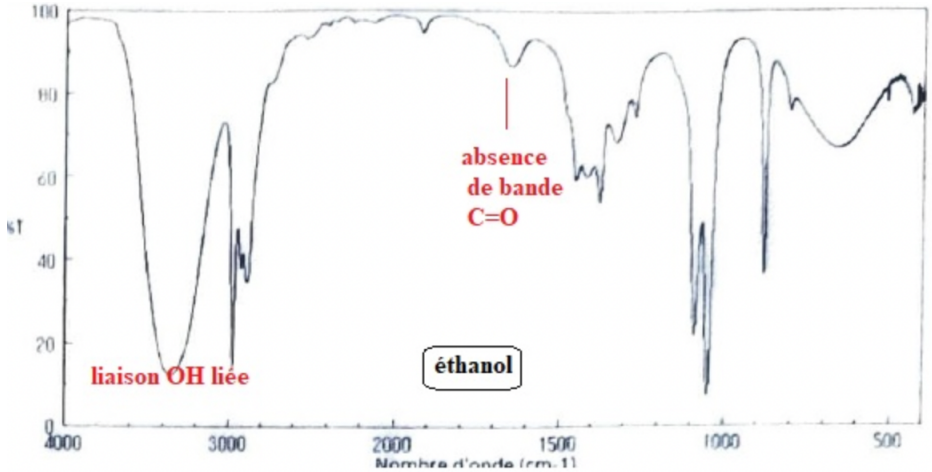
7. **Identifier les conditions expérimentales, en précisant le numéro de la synthèse, pour lesquelles la réaction d'estérification est la plus lente. Préciser la courbe associée.**

La synthèse n°1 est la plus lente car elle est chauffée à plus basse température. Par ailleurs elle n'a pas de réactif en excès donc elle n'a pas un très bon rendement. Cela correspondant à la courbe A (on voit que la quantité de matière formée est plus faible que pour la C mais également que la quantité de matière de réactif diminue moins vite que pour la B).

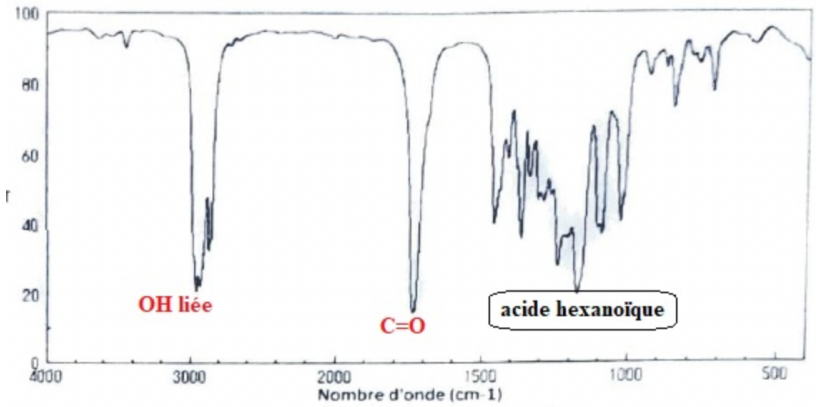
Les spectres infrarouges de chacun des réactifs avant la synthèse et du produit organique isolé et purifié après la synthèse ont été réalisés. Ils sont reproduits ci-après : (voir question 8)

8. **Parmi ces trois spectres infrarouges, identifier celui de l'ester E en précisant la démarche suivie.**

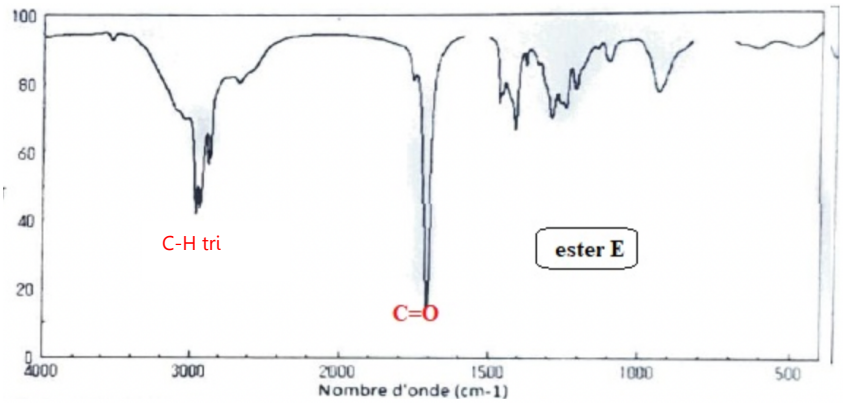
L'ester possède un C=O et doit donc posséder un pic à environ $1680 - 1740\ cm^{-1}$. On peut donc éliminer le spectre 1.



Par ailleurs, le spectre 2. Possède une bande fine et intense à environ $2900\ cm^{-1}$. Cela correspond au O-H d'un acide carboxylique. Ce n'est donc pas notre ester.



Par déduction, le spectre 3 est donc celui de notre ester.



Partie 2 – Étude de l'eau de brassage d'une bière brune

La composition de l'eau utilisée pour la fabrication d'une bière a une influence sur sa saveur ou sa couleur. Dans le cas de la bière brune, l'eau utilisée doit contenir, entre autres, des ions chlorure à une concentration massique comprise entre 100 et $200\ mg.L^{-1}$.
Dans cette partie, on souhaite savoir si une eau de source peut convenir au brassage d'une bière. À cette fin, les ions chlorure présents dans cette eau de source sont titrés par une solution de nitrate d'argent. Le titrage est suivi par conductimétrie.

Données :

- Conductivités molaires ioniques à 25°C :

ions	ion nitrate NO_3^-	ion chlorure $C\ell^-$	ion argent Ag^+	ion sodium Na^+
$\lambda\ (mS \cdot m^2 \cdot mol^{-1})$	7,1	7,7	6,2	5,0

- Masse molaire atomique du chlore : $M(C\ell) = 35{,}5\ g \cdot mol^{-1}$

Étude de la réaction support de titrage

Pour que la réaction entre les ions argent et les ions chlorure soit adaptée pour réaliser le titrage, il faut que la transformation associée soit rapide et totale. On souhaite s'assurer qu'elle respecte ces conditions. Pour cela, on mélange, dans un tube à essai :

- un volume V = 2,0 mL de solution aqueuse de chlorure de sodium $\left(Na^+(aq), Cl^-(aq)\right)$ de concentration $C_1 = 5{,}00 * 10^{-2}\ mol.L^{-1}$
- et un volume $V = 2{,}0\ mL$ de solution aqueuse de nitrate d'argent (Ag^+ (aq) , NO^-(aq)) de concentration $C_2 = 4{,}25 * 10^{-2}\ mol.L^{-1}$

On observe la formation immédiate d'un précipité blanc, solide identifié comme entant du chlorure d'argent. L'équation de la réaction modélisant cette transformation est : Ag^+ (aq) + Cl^- (aq) → AgCl(s)

La valeur de la constante d'équilibre de cette réaction à 25°C est $K = 6{,}4 * 10^9$.

9. Montrer qu'à l'équilibre du système chimique, l'avancement à l'équilibre $x_{éq}$ peut-être déterminé par la résolution de l'équation : $\frac{(V_1+V_2)(C^0)^2}{(V_1C_1-x_{éq})(V_2C_2-x_{éq})} = K$ avec $C^0 = 1\ mol.L^{-1}$

$$K = \frac{1}{\frac{C_{1,eq}}{C^0} * \frac{C_{2,eq}}{C^0}} = \frac{1}{\frac{C_{1,eq} * C_{2,eq}}{(C^0)^2}} = \frac{(C^0)^2}{C_{1,eq} * C_{2,eq}} = \frac{(C^0)^2}{\frac{C_1V_1 - x_{éq}}{V_1+V_2} * \frac{C_2V_2 - x_{èq}}{V_1+V_2}} = \frac{(C^0)^2}{\frac{(V_1C_1 - x_{éq})(V_2C_2 - x_{éq})}{V_1+V_2}} = \frac{(V_1+V_2)\left(C^0\right)^2}{(V_1C_1 - x_{éq})(V_2C_2 - x_{éq})}$$

Car à l'équilibre , $n_{1,éq} = n_{1,i} - x_{èq}$ et $n_{2,éq} = n_{2,i} - x_{éq}$

Soit, $C_{1,éq} = \frac{C_1V_1 - x_{éq}}{V_1+V_2}$ et $C_{2,éq} = \frac{C_2V_2 - x_{éq}}{V_1+V_2}$ $V_1 + V_2$ étant égale au volume total du mélange.

Cette équation du second degré en $x_{éq}$ admet deux solutions dont les valeurs arrondies sont : $x_1 = 1 * 10^{-4}\ mol$ et $x_2 = 8{,}5 * 10^{-5}\ mol$.

10. Indiquer la solution qui peut être retenues pour ce système chimique

On calcul la quantité de matière initiale de chaque réactif : $n_1 = C_1 * V_1 = 5{,}00 * 10^{-2} * 2{,}0 * 10^{-3} = 1{,}0 * 10^{-4}\ mol$

Et $n_2 = C_2 * V_2 = 4{,}25 * 10^{-2} * 2{,}0 * 10^{-3} = 8{,}5 * 10^{-5}\ mol$

$\frac{n_2}{1} < \frac{n_1}{1}$ → Le nitrate d'argent est le réactif limitant.

Or, $x_1 > n_2$ donc la seule solution possible est x_2 car on ne peut pas consommer plus de réactif que ce qu'il y a au départ.

11. Discuter si cette transformation est adaptée au titrage des ions chlorure.

$x_1 = n_2$ la réaction est donc totale. Par ailleurs, on dit que le précipité blanc se forme de manière immédiate. La réaction est donc adaptée.

<u>Dosage par titrage de l'eau de source envisagée pour le brassage</u>

On prélève un volume V = 100,0 mL d'eau de source que l'on introduit dans un grand bécher dans lequel on plonge une cellule conductimétrique. À l'aide d'une burette graduée, on ajoute progressivement une solution aqueuse de nitrate d'argent (Ag^+(aq) , NO_3^-(aq)) de concentration $C_3 = 1{,}00 * 10^{-2}\ mol.L^{-1}$.
La conductivité σ du mélange dans le bécher, maintenu sous une agitation régulière, évolue en fonction du volume V de la solution de nitrate d'argent ajouté. Le tracé de cette évolution est représenté en figure 2.

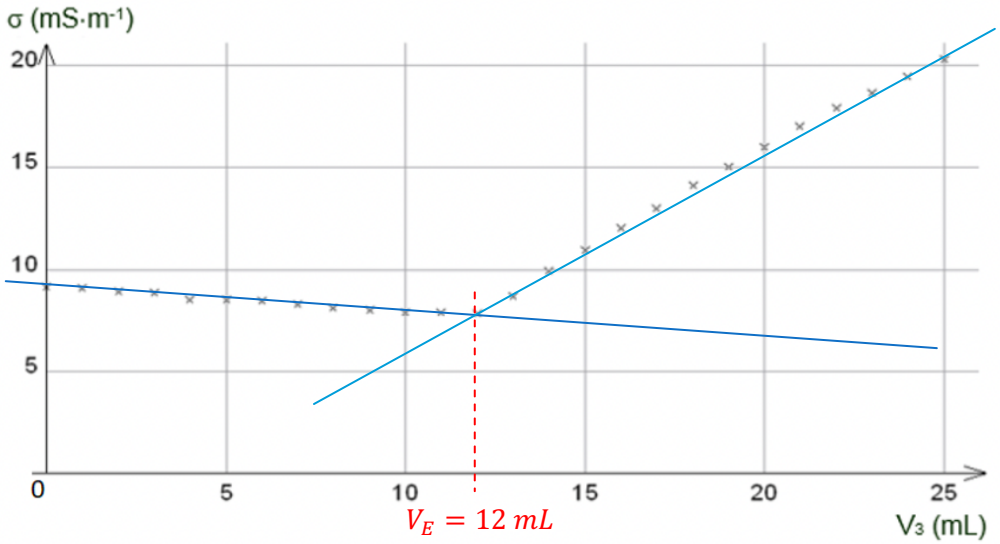
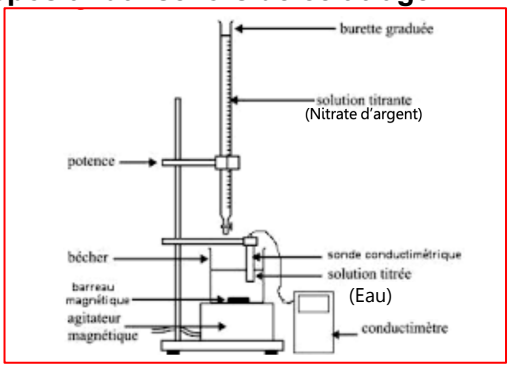


figure 2 : évolution de la conductivité σ du mélange dans le bécher en fonction du volume V_3 de solution de nitrate d'argent versé

12. Faire un schéma légendé du dispositif utilisé lors de ce titrage



13. Justifier les évolutions de la conductivité σ de la solution contenue dans le bécher avant et après l'équivalence

$\lambda_{NO^{3-}} \approx \lambda_{Cl^-} > \lambda_{Ag^+}$

Avant l'équivalence, la conductivité diminue très légèrement. C'est normal car on consomme des ions Cl^- pour former un composé non-ionique. La quantité de Ag^+ dans le milieu n'augmente pas car il est consommé au fur et à mesure. En revanche, la quantité de NO_3^- augmente au fur et à mesure du titrage. Or, $\lambda_{NO^{3-}} \approx \lambda_{Cl^-}$. NO_3^- « compensent » ainsi la conductivité que la solution aurait perdu au cours de la réaction consommant les Cl^-.

Après l'équivalence, on ajoute des ions sans plus en consommer. Il est donc normal que la conductivité augmente.

14. Indiquer si la teneur en ions chlorure de l'eau analysée peut convenir pour la fabrication de la bière brune.

On lit le volume équivalent au niveau du changement de pente de la courbe : $V_E = 12\ mL$

Or, $n_{Cl^-,i} = n_{Ag^+,éq}$

Soit, $C * V = C_3 * V_{éq}$ avec $V = 100{,}0\ mL, C_3 = 1{,}00 * 10^{-2}\ mol.L^{-1}$ et $V_E = 12\ mL$

Donc, $C = \frac{C_3 * V_{éq}}{V} = \frac{1{,}00 * 10^{-2} * 12}{100{,}0} = 1{,}2 * 10^{-3}\ mol.L^{-1}$

On souhaite la concentration massique : $C_m = M * C = 35{,}5 * 1{,}2 * 10^{-3} = 4{,}26 * 10^{-2}\ g.mol^{-1} = 42\ mg.mol^{-1}$

Cette valeur n'est pas comprise entre 100 mg/L et 200 mg/L/ Cette eau ne convient pas à la fabrication de la bière brune.
Le candidat est invité à prendre des initiatives, à indiquer les hypothèses qu'il est amené à formuler et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti. La démarche suivie est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.

EXERCICES : 2 au choix du candidats parmi 3 (5 points /exercice)

Exercice A : Les supercondensateurs

Un supercondensateur permet de stocker et de restituer rapidement de l'énergie électrique. Dans certains transports en commun, un supercondensateur est utilisé pour emmagasiner un maximum d'énergie électrique en quelques secondes lors des phases de freinage.
Si des condensateurs classiques étaient utilisés à la place des supercondensateurs, il faudrait *des armatures de très grandes surfaces et très rapprochées*, séparées par un excellent diélectrique.

Cet exercice a pour objectifs :
- De comparer qualitativement un supercondensateur avec un condensateur usuel ;
- D'étudier le comportement d'un supercondensateur lors de sa charge afin de déterminer expérimentalement la valeur de sa capacité et de la comparer à celle fournie par le fabricant.

Données constructeur sur le supercondensateur étudié :
- *Dimensions : 35 mm × 60 mm*
- *Capacité : 400 F*
- *Tension maximale : 2,5 V*
- *Énergie maximale : 0,35 Wh*



1. Comparer la valeur de la capacité du supercondensateur étudié aux valeurs usuelles des capacités des condensateurs utilisées au lycée ou en électronique.

Au lycée, nous avons utilisé des condensateurs avec des capacités de l'ordre du μF. Nous aurions également pu utiliser des capacités de l'ordre du $mF, du\ nF\ ou\ du\ pF$. C'est beaucoup plus petit que la valeur du supercondensateur proposé ici.

La valeur de la capacité C d'un condensateur peut être déterminée à l'aide de la relation : $C = \varepsilon * \frac{S}{d}$

Où : S est la surface en regard des deux armatures, d est l'écartement entre les deux armatures, ε est une constante caractéristique du matériau isolant placé entre les deux armatures.

2. Justifier qualitativement les parties en italique et soulignées du texte de présentation des supercondensateurs.

D'après la formule précédente la valeur de la capacité est proportionnelle à la surface des armatures. D'où le fait d'avoir « *des armatures de très grandes surfaces* » pour avoir une très grande capacité.

D'après la formule précédente, la valeur de la capacité est inversement proportionnelle à la distance entre les deux armatures. D'où le fait d'avoir des armatures « très rapprochées » pour avoir une plus grande capacité.

Étude du modèle du circuit RC série

On souhaite déterminer la valeur de la capacité du supercondensateur en utilisant un cycle de charge dans un circuit RC. Pour cela, on étudie dans un premier temps le comportement d'un modèle de circuit RC série.
On considère le circuit électrique schématisé ci-dessous (**figure 1**) composé d'une source idéale de tension E, d'un interrupteur K, d'un conducteur ohmique de résistance R, du supercondensateur de capacité C et d'un ampèremètre de résistance interne négligeable (la tension aux bornes de l'ampèremètre est considérée comme nulle).

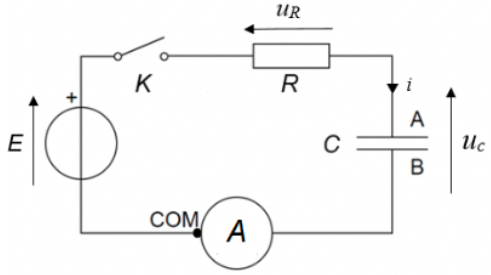


figure 1. Circuit électrique RC série

Le supercondensateur est initialement déchargé. A l'instant $t = 0\ s$, on ferme l'interrupteur

3. **Donner la relation entre l'intensité $i(t)$ du courant électrique et la dérivée de la charge $q(t)$ portée par l'armature A du supercondensateur, puis la relation entre l'intensité $i(t)$, la capacité C et la dérivée temporelle de la tension électrique $u_c(t)$ aux bornes du supercondensateur.**

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

Or, $q(t) = C * u_c(t)$

D'où, $i(t) = \frac{d(C*u_c(t))}{dt} = \frac{d(C)*u_c(t)+C*d(u_C(t))}{dt} = C * \frac{d(u_C(t))}{dt}$ *maths :* $(u*v)' = u'*v + u*v'$ *et* $\frac{d(C)}{dt} = 0$ *car* $C = cte$

4. **Montrer que l'équation différentielle dont la tension électrique $u_c(t)$ aux bornes du supercondensateur est une solution de la forme : $\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}u_c(t) = \frac{E}{\tau}$**
Exprimer la constante de temps τ en fonction de R et de C.

D'après la loi des mailles, on a : $E - u_R - u_C = 0 \rightarrow E = u_R + u_c$

Or, d'après la loi d'Ohm on a $u_R = R * i$ avec $i = C * \frac{du_c}{dt}$ → $u_R = R * C * \frac{du_c}{dt}$

Ainsi, $E = R * C * \frac{du_c}{dt} + u_c \iff \frac{E}{RC} = \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC}$ avec $\tau = RC$

Soit, $\frac{E}{\tau} = \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau}$

5. **Vérifier que les solutions de cette équation différentielles sont de la forme : $u_c(t) = A * e^{-\frac{t}{\tau}} + E$**
Déterminer l'expression de A pour la situation étudiée.

On résout l'équation différentielle de premier ordre avec second membre :

- **Solution homogène** : $u_{c,h}(t) = A * e^{-t/\tau}$ avec $A = cte$
- **Solution particulière** : $u_{c,p} = B$ avec $B = cte$ → la dérivée d'une constante est nulle. Donc, $\frac{du_{c,p}}{dt} = 0 \iff 0 + \frac{B}{\tau} = \frac{E}{\tau}$. Soit, $B = E$
- **Solution générale** : $u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p} = A * e^{-\frac{t}{\tau}} + E$

On utilise les conditions initiales pour déterminer A : à $t = 0$ le condensateur est déchargé donc $u_c(t = 0) = 0$
Soit, $0 = A * e^{-\frac{0}{\tau}} + E = A + E \iff A = -E$

Étude expérimentale et détermination de la valeur de la capacité

On réalise le montage précèdent avec une source idéale de tension de valeur E = 2,5 V et un conducteur ohmique de résistance R = 2,0 Ω .
À l'aide d'une carte d'acquisition, on réalise le suivi temporel de la tension aux bornes du supercondensateur durant sa charge (**figure 2**).

6. Déterminer la valeur C_1 de la capacité du supercondensateur en explicitant la démarche suivie.

On détermine τ graphiquement :

- Soit par la méthode de la tangente en 0 et de l'asymptote horizontale.
- Soit en retrouvant le temps nécessaire pour atteindre 63% de la charge maximale : $U_{63\%} = 0{,}63 * E = 1{,}6\ V$

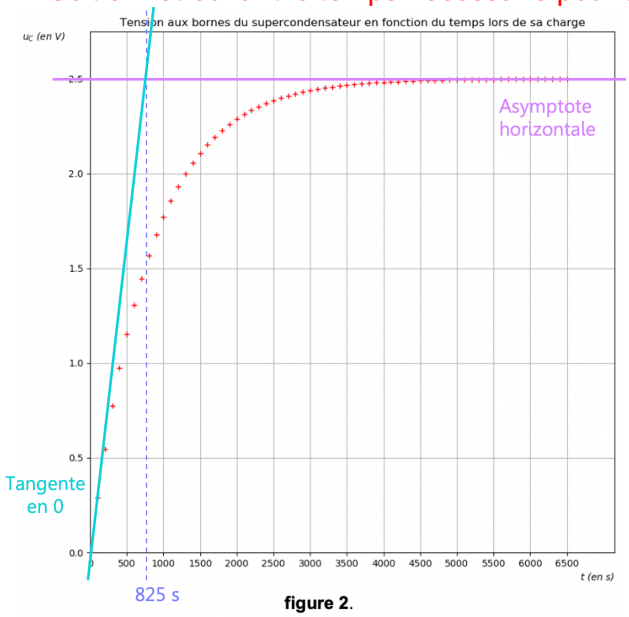


figure 2.

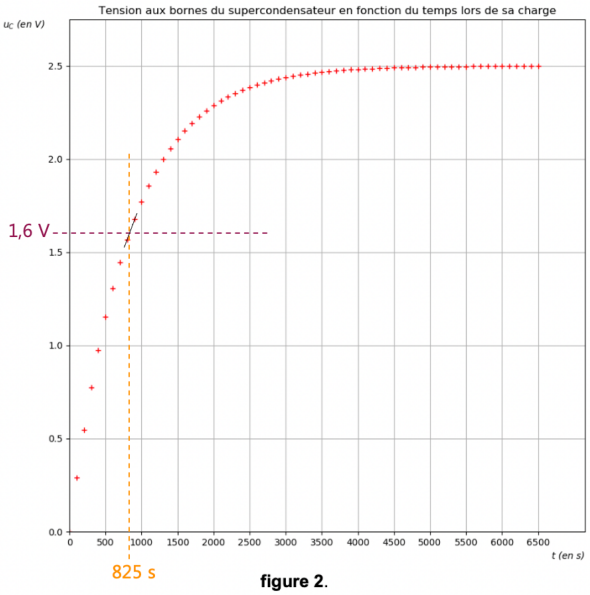


figure 2.

Dans les 2 cas on trouve $\tau = 825\ s$

À l'aide d'un microcontrôleur et d'un programme en python, on peut reproduire l'expérience un grand nombre de fois pour affiner la détermination du temps caractéristique du dipôle *RC* réalisé avec ce même supercondensateur. Ce programme permet d'obtenir le temps caractéristique du dipôle RC en déterminant la date pour laquelle le condensateur est chargé à 63%.

Après 10 exécutions successives du programme, on obtient, pour le temps caractéristique du dipôle RC, la série de valeurs suivantes exprimées en ms :

811614	818076	810301	810495	818526	812067	811327	813109	817838	819474

La moyenne $\bar{\tau}$ de la série de mesures est $\bar{\tau} = 814{,}2827\ s$

La calculatrice donne $1{,}175\ s$ pour le calcul de l'incertitude-type.

7. Écrire de manière appropriée le résultat de la mesure du temps caractéristique avec son incertitude

$\tau = \bar{\tau} \pm u(\bar{\tau}) = 814{,}2827 \pm 1{,}175 s$ → On garde un seul chiffre significatif pour l'incertitude (en arrondissant à l'excès) et s'arrête à l'unité pour la mesure de τ.

$\tau = 814 \pm 2s$

On estime que l'incertitude-type de la résistance du conducteur ohmique est $u(R) = 0{,}1\ \Omega$. L'incertitude-type sur la valeur de la capacité C_2 du supercondensateur se déduit des mesures de la résistance et du temps caractéristique moyen par la relation :

$$u(C_2) = C_2 * \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u(\bar{\tau_2})}{\bar{\tau_2}}\right)^2}$$

8. Déterminer la valeur de la capacité C_2 du supercondensateur ainsi que son incertitude-type.

$\tau = RC_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{\tau}{R} = \frac{814}{2{,}0} = 4{,}1 * 10^2\ F$

On calcul $u(C_2) = C_2 * \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u(\bar{\tau_2})}{\bar{\tau_2}}\right)^2} = 4{,}1 * 10^2 * \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{2{,}0}\right)^2 + \left(\frac{2}{814}\right)^2} = 2{,}0 * 10^1\ F = 0{,}2 * 10^2\ F$

Soit, $C_2 = (4{,}1 \pm 0{,}2) * 10^2\ F$

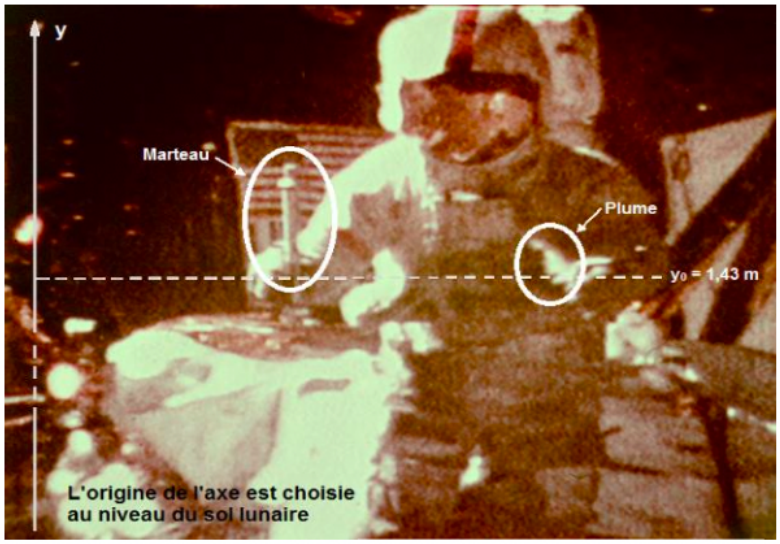
9. Comparer la valeur de la capacité C_2 mesurée expérimentalement avec la valeur de référence C_{ref} donnée par le constructeur en utilisant le quotient $\frac{|C_2 - C_{ref}|}{u(C_2)}$.

Conclure.

$r = \frac{|C_2 - C_{ref}|}{u(C_2)} = \frac{|4{,}1 * 10^2 - 400|}{0{,}2 * 10^2} = 0{,}5 < 2$. La valeur mesurée est en accord avec celle donnée par le constructeur.

Exercice B : Détermination de la masse de la lune

Au XVII[ème] siècle, Galilée a établi que la vitesse d'un objet en chute libre est indépendante de la masse de cet objet : lâchés avec des conditions initiales identiques, deux objets quelconques ont le même mouvement de chute libre.
Une vérification expérimentale spectaculaire a été réalisée sur la Lune par l'astronaute David Scott en 1971. Scott a utilisé un marteau et une plume qu'il a lâchés simultanément d'une même hauteur avec une vitesse initiale nulle. Les deux objets ont touché le sol lunaire au même instant.
Outre cette vérification de la loi de la chute des corps,
cette expérience permet également d'estimer la masse
de la Lune en utilisant les lois de la mécanique de Newton.



https://nssdc.gsfc.nasa.g

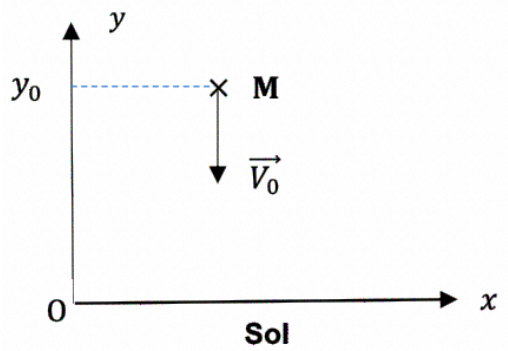
L'objet de cet exercice est de retrouver la masse de la Lune en analysant le mouvement de l'un des deux corps lâchés par Scott. On s'intéresse au mouvement du système {marteau}.

Données

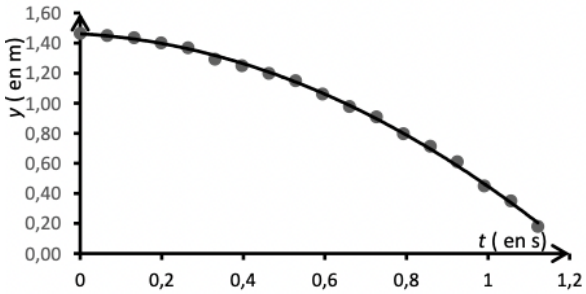
- *Constante de gravitation universelle :* $G = 6{,}67 * 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$
- *Rayon de la Lune :* $R_L = 1{,}74 * 10^6\ m$
- *Masse de la Lune :* $M_L = 7{,}34 * 10^{22}\ kg$

Le mouvement du centre de masse du marteau est étudié dans un référentiel lunaire supposé galiléen. L'origine du repère est choisie au niveau du sol lunaire.

Le pointage des positions du marteau débute à un instant choisi comme origine des dates lorsque le marteau se trouve à $1{,}43$ m du sol. Il a alors une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ verticale, dirigée vers le bas.
Le mouvement du marteau est vertical suivant l'axe (Oy).



Le tableur utilisé permet de modéliser la courbe $y = f(t)$ représentant l'évolution temporelle des positions par une parabole d'équation : $y = A * t^2 + B * t + C$

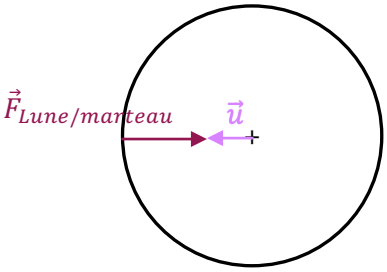


$A = -0{,}865\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,
$B = -0{,}15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,
$C = 1{,}43$ m.
y en mètre
t en seconde

Questions préliminaires

1. **Compte tenu de la faible valeur de la hauteur initiale, on considère que la distance entre le centre de la Lune et le marteau tout au long de sa chute est égale au rayon de la Lune R_L. Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{Lune/marteau}}}$ modélisant l'action exercée par la Lune sur le marteau en fonction de la masse de la Lune M_L, de la masse du marteau m, du rayon de la Lune R_L et d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ orientée du centre de la Lune vers la surface lunaire. Représenter cette force sur un schéma, sans souci d'échelle.**

$$\vec{F}_{\text{Lune/marteau}} = -G * \frac{M_L * m}{R_L^2} * \vec{u}$$



2. **Par approximation, on peut assimiler le champ de gravitation lunaire $\overrightarrow{\mathcal{G}_L}$ à la surface de la Lune au champ de pesanteur $\overrightarrow{g_L}$.**

   Montrer que l'expression du champ de pesanteur $\overrightarrow{g_L}$, au lieu où se trouve le marteau sur la Lune, s'écrit : $\overrightarrow{g_L} = -G * \frac{M_L}{R_L^2}\vec{u}$

$\overrightarrow{g_L} = \frac{\vec{F}_{Lune/marteau}}{m} = -G * \frac{M_L}{R_L^2} * \vec{u}$ (vu en première)

3. **Montrer que, pendant la chute, le vecteur accélération du marteau $\vec{a} = \overrightarrow{g_L}$**

- Système : {marteau}
- Référentiel : lunaire
- Bilan des forces : $\vec{F}_{Lune/marteau}$

On utilise la 2ème loi de Newton :

$\sum \vec{F} = m * \vec{a}$

$\vec{F}_{Lune/marteau} = m * \vec{a} \Leftrightarrow -G * \frac{M_L * m}{R_L^2} * \vec{u} = m * \vec{a} \Leftrightarrow -G * \frac{M_L}{R_L^2} * \vec{u} = \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{g_L} = \vec{a}$

Problème à résoudre

En s'appuyant sur les questions préliminaires et sur la modélisation de l'évolution temporelle des positions fournie par le tableur, déterminer la masse de la Lune M_L.

L'analyse des données, la démarche suivie ainsi que les calculs doivent être correctement présentés et justifies.

Un regard critique sera porté sur le résultat et des propositions seront faites sur les causes possibles d'un éventuel écart avec la valeur de référence fournie.

Le candidat est invité à présenter sa démarche même si elle n'est pas complètement aboutie.

La modélisation proposée correspond à une équation horaire du mouvement. Pour connaître à quoi correspondent les paramètres A, B et C nous allons devoir établir l'équation horaire du mouvement à partir de la deuxième loi de Newton ci-dessus.

$\overrightarrow{g_L} = \vec{a}$ (Les deux vecteurs sont dirigés selon l'axe vertical y).

Donc, si on projette l'accélération sur les axes x et y, on a : $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g_L \end{cases}$

- **La vitesse est la primitive de l'accélération**. Donc, $\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = -g_L * t + C_2 \end{cases}$
  - ➔ Conditions initiales : à $t = 0, v_x = C_1 = 0 \; et \; v_y = g_L * 0 + C_2 = v_0$ ➔ $C_1 = 0 \; et \; C_2 = v_0$
  - ➔ $\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -g_L * t + v_0 \end{cases}$

- **La position est la primitive de l'accélération.** Donc, $\begin{cases} x = C_3 \\ y = -\frac{1}{2} g_L t^2 + v_0 t + C_4 \end{cases}$
  - ➔ Conditions initiales : à $t = 0, x = C_3 = 0$ et $y = \frac{1}{2} g_L * 0^2 + v_0 * 0 + C_4 = h_0$ ➔ $C_3 = 0$ et $C_4 = h_0 = 1{,}43\ m$
  - ➔ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} g_L t^2 + v_0 t + h_0 \end{cases}$

L'équation horaire de ce mouvement est donc $y = -\frac{1}{2}g_L t^2 + v_0 t + h_0$

Sur la modélisation, on a : $y = A * t^2 + B * t + C$. Par analogie, $A = -\frac{1}{2}g_L$, $B = v_0$ et $C = h_0$

Avec $A = -0{,}865 m.s^{-2}$, $B = -0{,}15\ m.s^{-1}$ et $C = 1{,}43\ m$

Soit, $\frac{1}{2}g_L = -0{,}865\ m.s^{-2}$ → $g_L = 2 * 0{,}865 = 1{,}73\ m.s^{-2}$

Or, on a vu dans la question 2 que $\overrightarrow{g_L} = -G * \frac{M_L}{R_L^2} * \vec{u}$ → Soit, $g_L = G * \frac{M_L}{R_L^2}$

Ainsi, $M_L = \frac{g_L * R_L^2}{G} = \frac{1{,}73 * (1{,}74 * 10^6)^2}{6{,}67 * 10^{-11}} = 7{,}85 * 10^{22}\ kg$

D'après les données, $M_{L,théorique} = 7{,}34 * 10^{22}\ kg$

On calcul l'écart relatif : $r = \frac{|M_{L,théorique} - M_{L,expérimentale}|}{M_{L,théorique}} = \frac{|7{,}34 * 10^{22} - 7{,}85 * 10^{22}|}{7{,}34 * 10^{22}} = 0{,}069 = 6{,}9\%$

L'écart est faible mais peut-être dû à des erreurs de pointages de la vidéo ou des erreurs d'étalonnage de distance lors de ce même pointage.

Exercice C : La congélation de l'eau

Dans cet exercice, on souhaite estimer la durée nécessaire pour que toute l'eau d'un bac à glaçons, placée dans un congélateur, soit transformée en glace. L'eau est initialement à la température ambiante. On distingue deux phases au processus :

- *(phase a)* : Le refroidissement de l'eau de la température ambiante (T_a) à la température de solidification (T_s)
- *(phase b)* : Le changement d'état de l'eau qui s'effectue à température constante (T_s)

Dans l'ensemble de l'exercice, le système étudié {eau} est l'eau placée dans le bac à glaçons. L'énergie reçue par le système est comptée positivement, celle perdue est comptée négativement.

Données :

- *Masse d'eau à congeler :* $m = 150\ g$
- *Température ambiante :* $T_a = 23{,}0°C$
- *La température de solidification de l'eau à la pression atmosphérique* T_s *est supposée connue du candidat* → $T_s = 0{,}00\ °C$.
- *Capacité thermique massique de l'eau liquide :* $c_{eau} = 4\,185\ J.K^{-1}.kg^{-1}$

1. **Préciser le sens dans lequel se font les transferts thermiques entre le système {eau} et l'air du congélateur. En déduire le signe de l'énergie échangée sous forme de transfert thermique Q entre le système et l'air du congélateur.**

Ici, l'eau (système) cède de l'énergie thermique à l'air du congélateur. Donc, $Q < 0$.

2. **Indiquer si le changement d'état de l'eau *(phase b)* est une transformation *endothermique* ou *exothermique*.**

Cette transformation est exothermique car l'eau donne de la chaleur au milieu extérieur.

3. **Donner l'expression de la variation de l'énergie interne ΔU du système {eau} durant la phase de refroidissement *(phase a)* en fonction de la variation de sa température ΔT, de sa masse m et de sa capacité thermique massique c_{eau}.**

$\Delta U = Q = m * c_{eau} * \Delta T$

Première estimation de la durée de congélation à l'aide de la puissance du dispositif de refroidissement du congélateur

Dans le congélateur, un dispositif de refroidissement permet de prélever de l'énergie à l'air de la cavité intérieure du congélateur, l'air prélevant de l'énergie à l'eau placée dans le bac à glaçons. Dans cette partie, on prend pour hypothèse que l'énergie prélevée par unité de temps à l'eau est égale à la puissance du dispositif de refroidissement du congélateur, qui vaut 40 W.

4. **A l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que l'énergie échangée par l'eau avec l'air, sous forme de transfert thermique Q_r au cours du refroidissement *(phase a)* a pour valeur $-14{,}4\ kJ$.**

$Q = m * c_{eau} * \Delta T$ avec $m = 150g = 150 * 10^{-3}\ kg$, $c_{eau} = 4\,185\ J.K^{-1}.kg^{-1}$ et $\Delta T = T_s - T_a = 0 - 23{,}0 = -23{,}0\ K$
$Q = 150 * 10^{-3} * 4185 * (-23{,}0) = -1{,}43 * 10^4\ J = -14{,}3\ kJ$

5. **Estimer la durée nécessaire pour que cette énergie soit prélevée par le dispositif de refroidissement du congélateur.**

$\Delta t = \frac{|Q|}{P} = \frac{14{,}3}{40} = 3{,}57 * 10^2\ s = 5min57$

Pour le changement d'état de l'eau, le même raisonnement conduit à estimer que la durée nécessaire pour que toute l'eau soit transformée en glace est de 1250 secondes soit environ 21 minutes. Or, la réalisation de l'expérience fait apparaitre une durée nécessaire pour la congélation complète de l'eau de l'ordre d'une heure. Pour expliquer cet écart, on envisage un autre modèle.

Deuxième estimation de la durée de congélation avec la loi phénoménologique de Newton

On fait l'hypothèse que l'air à l'intérieur du congélateur joue le rôle d'un thermostat, sa température T restant constante.
Les transferts thermiques entre le système {eau} et l'air intérieur du congélateur (mis en mouvement par une ventilation) peuvent être décrit par la loi de Newton. Cette loi lie le flux thermique échangé Φ (en W) à l'écart de température entre l'air (T_{th}) et le système (T), et à la surface d'échange S : $\boldsymbol{\Phi = -hS(T - T_{th})}$
Pendant la phase de refroidissement (*phase a)*, la température T du système {eau} n'est pas constante. Pour pouvoir estimer la durée nécessaire au refroidissement, il convient de modéliser son évolution temporelle.

Données
- *Température de l'air dans l'espace intérieur du congélateur :* $T = -18{,}0°C$
- *La valeur du produit* $h * S$ *est estimé à :* $hS = 0{,}92\ W.K^{-1}$

6. **La loi de Newton permet d'estimer les valeurs du flux thermique entre l'eau et l'air au début $(T = T_a)$ et à la fin $(T = T_s)$ de la phase de refroidissement : $\Phi(T_a) = -38W$ et $\Phi(T_s) = -17W$**

Comparer ces valeurs à la puissance du système de refroidissement du congélateur. Discuter de ce qu'apporte ce modèle par rapport à celui utilisé lors de la première estimation.
La puissance du système de refroidissement est $P = 40\ W$. Cette valeur est proche du flux thermique au début du refroidissement. Il est en revanche très éloigné du flux à la fin du refroidissement.
Ce modèle prend en compte le fait que le flux thermique varie au cours du temps car il est proportionnel à la différence de température entre l'eau et l'air du congélateur. Le flux diminue donc au cours du temps.

7. **Donner l'expression reliant l'énergie échangée sous forme de transfert thermique Q entre l'air et l'eau pendant une durée Δt très petite, le flux thermique Φ, supposé constant pendant cette durée, et la durée Δt.**

$Q = \Phi * \Delta t$

8. **À l'aide du premier principe de la thermodynamique et de la loi de Newton, dans le cas où Δt tend vers 0, montrer que l'évolution temporelle de la température de l'eau est régie par : $\frac{dT}{dt} = -r(T - T_{th})$**

Exprimer le coefficient r en fonction de h, S, m et c_{eau} , préciser sa valeur et son unité.
Première loi de Newton : $\Delta U = Q = m * c_{eau} * \Delta T$

On divise par Δt : $\frac{Q}{\Delta t} = \frac{m * c_{eau} * \Delta T}{\Delta t}$

Or, $\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = -hS(T - T_{th}) = \frac{m * c_{eau} * \Delta T}{\Delta t}$

Si Δt tend vers 0, alors $-hS(T - T_{th}) = \frac{m * c_{eau} * dT}{dt}$

Soit, $\frac{-hS(T - T_{th})}{m * c_{eau}} = \frac{dT}{dt} \rightarrow \frac{-hS}{m * c_{eau}} * (T - T_{th}) = \frac{dT}{dt}$

On est donc bien sous la forme $\frac{dT}{dt} = -r * (T - T_{th})$ avec $r = \frac{hS}{mc_{eau}}$

$hS = 0{,}92\ W.K^{-1}$, $m = 150\ g = 150 * 10^{-3}\ kg$, $c_{eau} = 4185\ J.K^{-1}.kg^{-1} \rightarrow r = \frac{0{,}92}{150 * 10^{-3} * 4185} = 1{,}5 * 10^{-3}\ W.J^{-1} =$

$1{,}5 * 10^{-3}\ s^{-1}$ car, $\frac{[W].[K^{-1}]}{[kg].[J].[K^{-1}].[kg^{-1}]} = [W].[J^{-1}]$ et $[W] = \frac{[J]}{[s]} \rightarrow [W.J^{-1}] = [s^{-1}]$

Dans les conditions de l'expérience, la solution de cette équation différentielle est : $\boldsymbol{T(t) = (T_a - T_{th})e^{-rt} + T_{th}}$

9. Déduire de cette modélisation, une estimation de la durée nécessaire pour refroidir l'eau liquide lors de la première phase du processus (*phase a*). Comparer avec la première étude. Conclure.

$T(t) = (T_a - T_{th})e^{-rt} + T_{Th}$

On cherche t

Donc, $T - T_{th} = (T_a - T_{Th}) * e^{-rt} \Leftrightarrow \frac{T-T_{th}}{T_a-T_{Th}} = e^{-rt} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{T-T_{th}}{T_a-T_{Th}}\right) = -rt \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{T-T_{th}}{T_a-T_{Th}}\right)}{-r} = t$

Avec $T = 0{,}00°C$, $T_{th} = -18{,}0°C$, $T_a = 23{,}0°C$, $r = 1{,}5 * 10^{-3}s^{-1}$

Soit, $t = \frac{\ln\left(\frac{0-(-18)}{23{,}0-(-18)}\right)}{-1{,}5*10^{-3}} = 5{,}5 * 10^2\ s = 9\ \text{min}\ 9\ s$

On trouve un temps plus élevé que lors de la première étude. On se rapproche de la réalité mais si on ajoute les 21min de congélation estimée (phase b), on est encore loin de la durée de congélation expérimentale (1h).

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.