Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + Physique, veuillez visiter :
bac-maths-physique.fr/annales-sujets-et-corriges

Spécialité Physique - Chimie : Amérique du Nord

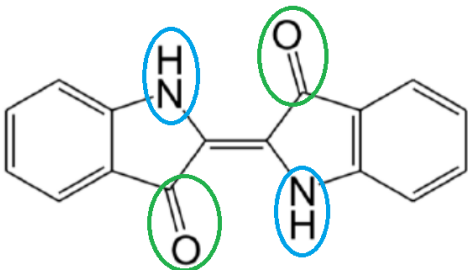
Sujet 1 2022

Merci d'adresser vos éventuelles remarques (coquilles, erreurs de raisonnement) à anthony.le.bihan@icloud.com.

Exercice 1 : Indigo et carmin d'indigo (10 points)

A.1) On reconnait :
- 2 groupes carbonyles, de la famille des cétones (vert)
- 2 groupes amines, de la familles de amines (bleu)

FIGURE 1 – Groupes fonctionnels



A.2) On calcule les 2 quantités de matière initiales via la formule $n = \dfrac{m}{M}$ avec n la quantité de matière, m la masse et M la masse molaire. De plus, pour calculer une masse on peut effectuer le produit $m = \rho \times V$ avec ρ une masse volumique et V un volume. Ainsi,
- 2-nitrobenzaldéhyde : $n_0(\text{2-nitrobenzaldéhyde}) = \dfrac{0,5}{151,1} = 3,31 \times 10^{-3}$ mol
- acétone : $n_0(\text{acétone}) = \dfrac{\rho_{\text{acétone}} \times V_{\text{acétone}}}{M_{\text{acétone}}} = \dfrac{1,05 \times 5}{58,1} = 9,04 \times 10^{-2}$ mol

A.3) Dès que la notion de réactif limitant est évoquée, il faut penser à réaliser un tableau d'avancement.

mol	2 2-nitrobenzaldéhyde +	2 acétone	$+ 2\ HO^-$ →	Indigo	$+ 2\ CH_3COO^-$	$+ 4\ H_2O$
$x = 0$	$3,31 \times 10^{-3}$	$9,04 \times 10^{-2}$	excès	0	0	excès
$x = x_f$	$3,31 \times 10^{-3} - 2x_f$	$9,04 \times 10^{-2} - 2x_f$	excès	x_f	$2x_f$	excès

Comme la réaction est totale, on a soit $n_f(\text{2-nitrobenzaldéhyde}) = 0$, soit $n_f(\text{acétone}) = 0$. Au total,

$$x_f = \min\left\{\frac{n_f(\text{2-nitrobenzaldéhyde})}{2}; \frac{n_f(\text{acétone})}{2}\right\} = \frac{n_f(\text{2-nitrobenzaldéhyde})}{2} = 1,65 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

D'après le tableau d'avancement, $n_f(\text{indigo}) = x_f = 1,65 \times 10^{-3}$ mol. On remonte à la masse via $m = n \times M$: $m(\text{indigo}) = 1,65 \times 10^{-3} \times 262,3 = 0,43$ g.

A.4) Puisqu'on a produit 0,35 g alors que, théoriquement, on peut en produire 0,43 g : la réaction n'est pas totale. On peut donc calculer son rendement :

$$\eta = \frac{m_{\text{réelle}}}{m_{\text{théorique}}} = \frac{0,35}{0,43} = 81,4\%$$

B.1) Le couple oxydant/réducteur mis en jeu est : $\text{Ind}_{(s)}/\text{IndH}_{2(aq)}$. Après avoir équilibré successivement en H^+, puis en e^-, on obtient la demi-équation électronique :

$$\text{IndH}_{2(aq)} = \text{Ind}_{(s)} + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$$

B.2) Comme 2 électrons sont mis en jeu dans chacune des demi-équations, il n'est pas nécessaire de multiplier l'une ou l'autre. On peut directement les sommer sachant que les réactifs sont $\text{Ind}_{(s)}$ et $S_2O_4{}^{2-}$:

$$S_2O_4{}^{2-} + \text{Ind} + 2\text{H}_2\text{O} \longrightarrow 2\,SO_3{}^{2-} + 2\text{IndH}_2 + 2\text{H}^+$$

B.3) Au contact de l'air (dioxygène O_2 entre autres), il y a oxydation de $IndH_2$ pour former Ind. L'autre couple mis en jeu subit donc une réduction de O_2, donc O_2 est l'oxydant. L'autre couple couple oxydant/réducteur mis en jeu est donc $O_{2(g)}/H_2O_{(\ell)}$ et la demi équation associée est :

$$O_2 + 4\,e^- + 4\,H^+ = 2\,H_2O$$

C.1) Le couple acide/base du carmin d'indigo est HIn/In^- et la demi-équation associée est $HIn = In^- + H^+$. Ici, c'est l'acide HIn qui réagit. Il faut donc que l'eau, H_2O, soit la base dans l'autre couple. Le couple acide/base de l'eau à choisir est donc H_3O^+/H_2O et la demi-équation associée est $H_3O^+ = H_2O + H^+$. L'équation de la réaction du carmin d'indigo avec l'eau est donc :

$$HIn + H_2O = In^- + H_3O^+$$

C.2) Si on doit calculer un taux d'avancement final, il faut impérativement réaliser un tableau d'avancement. On a $n_0(HIn) = c \times V = 10^{-2}$ mol. L'eau est en excès. Dans le tableau ci-dessous, il y a 3 lignes :

— une ligne $x = 0$ pour l'état initial. Les produits ne sont pas encore formés (0 mol), l'eau est en excès et on a calculé la quantité initiale de carmin d'indigo.

— une ligne $x = x_f$: on se base sur la mesure finale du pH de la solution pH= 6,3. Par définition, pH= $-\log\left(\dfrac{[H_3O^+]}{c^0}\right)$ avec $c^0 = 1$mol/L la concentration de référence. Ainsi, $[H_3O^+]_{eq} = c^0 \times 10^{-pH} = 10^{-6,3}$mol/L. On a donc $x_f = [H_3O^+]_{eq} \times V = 10^{-7,3}$mol/L.

— une ligne $x = x_{max}$ qui correspond (ou pas) à l'état final si la réaction était totale. Ici, il n'y a qu'un seul réactif, le carmin, donc ça ne peut être que lui le réactif limitant. On a donc $x_{max} = n_0(HIn) = 10^{-2}$ mol.

mol	HIn	+ H_2O	+ In^-	$\rightarrow H_3O^+$
$x = 0$	10^{-2}	excès	0	0
$x = x_f$	$10^{-2} - 10^{-6,3} \simeq 10^{-3}$	excès	$10^{-6,3}$	$10^{-6,3}$
$x = x_{max}$	0	excès	10^{-2}	10^{-2}

Le taux d'avancement est défini comme $\tau = \dfrac{x_f}{x_{max}} = \dfrac{\text{réel}}{\text{théorique}}$. Ici,

$$\tau = \frac{10^{-7,3}}{10^{-2}} = 10^{-5,3} \simeq 5,0 \times 10^{-6} = 0,0005\%$$

Le taux d'avancement est extrêmement faible, on est très proche de l'état initial. Le réaction est non totale.

C.3) On reprend l'expression de l'équation du carmin d'indigo avec l'eau :

$$HIn_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} = In^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

On réalise un tableau d'avancement théorique qui nous donne les concentrations de chaque espèce :

mol	HIn	+ H_2O	+ In^-	$\rightarrow H_3O^+$
$x = 0$	$c \times V$	excès	0	0
$x = x_f$	$c \times V - x_f$	excès	x_f	x_f

Donc,

$$[H_3O^+] = \frac{x_f}{V} \qquad [In^-] = \frac{x_f}{V} = [H_3O^+] \qquad [HIn] = \frac{cV - x_f}{V} = c - [H_3O^+]$$

Par ailleurs, $[H_3O^+] = c^0 \times 10^{-pH}$. Le quotient réactionnel à l'équilibre (par définition c'est le produit des activités des produits divisé par le produit des activités des réactifs), qui s'appelle constante d'acidité K_a, est

$$K_a = \frac{\frac{[H_3O^+]}{c^0} \times \frac{[In^-]}{c^0}}{\frac{[HIn]}{c^0} \times 1} = \frac{[H_3O^+] \times [In^-]}{[HIn] \times c^0} = \frac{[H_3O^+]^2}{(c - [H_3O^+])c^0} \implies K_a = \frac{(10^{-pH})^2}{(c - 10^{-pH}) \times c^0}$$

C.4) *Application numérique :* pH= 6,3 et $c = 10^{-1}$mol/L. On trouve $K_a = 2,5 \times 10^{-12}$. Par définition, pKa= $-\log\left(\dfrac{K_a}{c^0}\right)$, soit $K_a = c^0 \times 10^{-pKa}$. Donc, pKa= 11,6.

C.5) On peut directement citer le cours ou bien redémontrer ce qu'il s'y dit. On reprend l'expression du K_a, on détermine l'expression du pKa et on y reconnait l'expression du pH :

$$K_a = \frac{[In^-] \times [H_3O^+]}{[HIn] \times c^0} \Longrightarrow \text{pKa} = -\log\left(\frac{[In^-]}{[HIn]}\right) - \log\left(\frac{[H_3O^+]}{[c^0]}\right) = \text{pH} - \log\left(\frac{[In^-]}{[HIn]}\right)$$

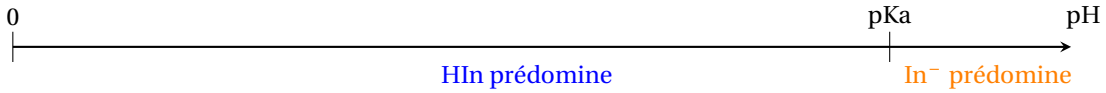
Ainsi,

— si In^- prédomine, $[In^-] > [HIn] \Longrightarrow \log\left(\frac{[In^-]}{[HIn]}\right) > 0$ et d'après l'expression précédente, pKa<pH

— si HIn prédomine, $[In^-] < [HIn] \Longrightarrow \log\left(\frac{[In^-]}{[HIn]}\right) < 0$ et d'après l'expression précédente, pKa>pH

On peut alors tracer le diagramme de prédominance :

FIGURE 2 – Diagramme de prédominance du carmin d'indigo



Pour que le carmin d'indigo soit un indicateur coloré pertinent, il faut que sa zone de virage contienne le pH à l'équivalence. Ici, on a le changement de couleur à pH= 11,6. Il est donc nécessaire que le pH à l'équivalence soit proche de cette valeur.
Pour déterminer le pH à l'équivalence sur une courbe de titrage, il y a 2 méthodes au programme : dérivée et tangente. À la main, seule la méthode des tangentes est réalisable.

FIGURE 3 – Application de la méthode des tangentes à la courbe de titrage



On trouve que le pH à l'équivalence est $\text{pH}_{eq} = 7$. Donc le bleu de carmin n'est pas du tout adapté comme indicateur coloré pour ce titrage.

D.1) La longueur d'onde sur laquelle doit être réglée le spectrophotomètre doit correspondre à un maximum d'absorption et doit également être située dans le domaine du visible. D'après le spectre, on doit prendre $\lambda = 600$ nm.

D.2) Le pic à 300 nm ne contribue pas à une coloration de la solution (en tout cas pas pour nos yeux *i.e.* dans le domaine du visible). Le carmin d'indigo présente un maximum d'absorption pour $\lambda = 600$ nm. Il apparait donc de la couleur complémentaire dans un cercle chromatique. Il est donc bleu-violet.

D.3) On va prélever un volume $V_{\text{mère}}$ d'une solution de concentration massique $C_{\text{mère}} = 80$ mg/L que l'on va diluer dans de l'eau distillée afin d'obtenir $V_{\text{fille}} = 50$ mL d'une solution fille à la concentration massique

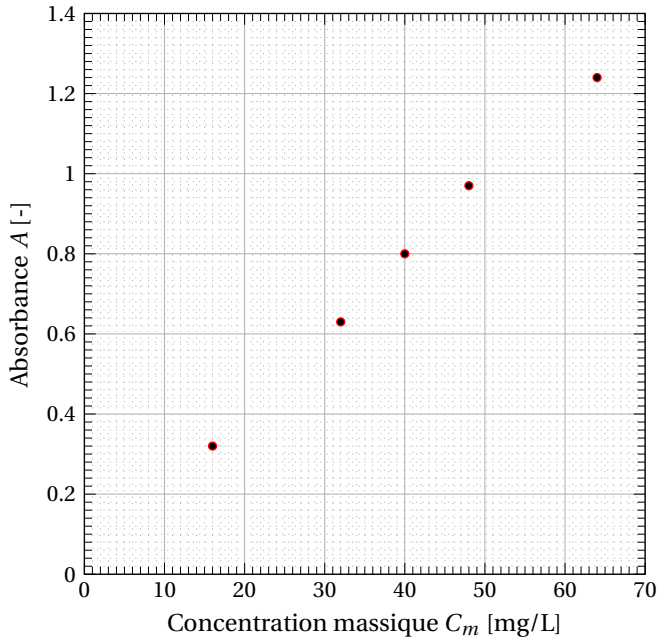
$C_{\text{fille}} = 80$ mg/L$= C_{\text{mère}}/2$. D'après le principe de conservation de la masse, la masse de carmin d'indigo se conserve au cours de la dilution, soit :

$$m_{\text{mère}} = m_{\text{fille}} \implies C_{\text{mère}} V_{\text{mère}} = C_{\text{fille}} V_{\text{fille}} \implies V_{\text{mère}} = \frac{C_{\text{fille}}}{C_{\text{mère}}} V_{\text{fille}} = \frac{V_{\text{fille}}}{2} = 25 \text{ mL}$$

Le protocole est donc le suivant :
— la solution mère S est initialement placée dans un bécher ;
— on prélève, à l'aide d'une pipette jaugée de 25 mL, la solution mère S ;
— on l'introduit dans une fiole jaugée de 20 mL ;
— on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge ;
— on bouche et on agite.

D.4) On ne connait rien de la solution S, si ce n'est que cette solution, une fois diluée 200 fois, possède une absorbance $A = 0,75$. Si connaissait une loi reliant absorbance A et concentration massique C_m, on pourrait répondre à la question. Donc :
— à partir des données, on trace $A = f(C_m)$
— on en déduit une loi
— à partir de cette loi, on calcule la concentration massique C_m de la solution S_d
— on remonte à la concentration massique de la solution injectable par un facteur 200

FIGURE 4 – Tracé des données expérimentales



Ce tracé nous permet de postuler une loi du type $A(C_m) = k \times C_m$. C'est cohérent avec la loi de BEER-LAMBERT (mais légèrement différent car ici on manipule des concentrations massiques et non pas des concentrations molaires).

On détermine $k = \dfrac{A}{C_m}$ le plus proprement possible. Plutôt que de ne s'appuyer que sur une seule mesure, on va s'appuyer sur toutes les mesures et moyenner la valeur de k :

TABLE 1 – Détermination de k

Solution	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Moyenne
$k = \dfrac{A}{C_m}$	$1,93 \times 10^{-2}$	$2,02 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-2}$	$1,97 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-2}$	$1,98 \times 10^{-2}$

On a donc déterminé $k = 1,98 \times 10^{-2}$ L/mg. On peut donc accéder à la valeur de la concentration massique de la solution S_d, sachant que son absorbance est $A = 0,75$:

$$C_m(S_d) = \frac{A}{k} = \frac{0,75}{1,98 \times 10^{-2}} = 37,8 \text{ mg/L}$$

Puisque la solution S_d est issue d'une dilution par 200 de la solution injectable S, on a :

$$C_m(S) = 200 \times C_m(S_d) \implies C_m(S) = 7,56 \text{ g/L}$$

Par jour, un patient de 70 kg peut ingérer une masse $m(S) = 5 \times 70 = 350$ mg de solution S. Le volume $V(S)$ de solution S maximal qui peut être injectée est donc :

$$V(S) = \frac{m(S)}{C_m(S)} = \frac{350 \times 10^{-3}}{7,56} = 46,3 \text{ mL}$$

Exercice A : L'épaisseur du matelas du saut à la perche (5 points)

A.1) On rappelle les expressions des énergies : $E_{pp} = mgz$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ avec v la vitesse de l'athlète. On étudie la partie ascendante du mouvement donc l'athlète va s'élever et donc l'énergie potentielle de pesanteur va augmenter. On peut donc identifier les courbes à partir de leur monotonie : $A \iff E_c$ et $B \iff E_{pp}$.

A.2) On a rappelé ci-dessus les expressions des énergies. Le code à compléter est donc :

```
# calculs des valeurs des différentes énergies en fonction du temps
for i in range(0,Np) :
Em[i]=4775.0  #Energie mécanique
Ec[i]=0.5*m*v[i]*v[i] #Energie cinétique
Epp[i]=m*g*z[i] #Energie potentielle de pesanteur
```

A.3) Par définition, l'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = E_{pp} + E_{pe}$: l'énergie potentielle totale est la somme d'une énergie potentielle de pesanteur et d'une énergie potentielle élastique. Le programme affirme, qu'à tout instant, $E_m = 4775$ J. En particulier à $t = 0$, $E_m = E_c(t=0) + E_{pp}(t=0) + E_{pe}(t=0) = \frac{1}{2}mv^2(t=0) + mgz(t=0) + 0$ car initialement, la poutre n'est pas déformée donc l'énergie potentielle élastique est nulle. On en déduit :

$$\frac{E_m}{m} = v^2(t=0) + gz(t=0) \iff v(t=0) = \sqrt{\frac{2E_m}{m} - 2gz(t=0)}$$

On connaît $E_m = 4775$ J, $m = 79$ kg, $g = 9,81$ N/kg et d'après la liste z, $z(t=0) =$z[0]$=1$ m. On trouve $v(t=0) = 10,0$ m/s.

A.4) Pour les situations 1 et 3, la poutre n'est quasiment pas déformée donc l'énergie potentielle élastique est nulle (ou presque). En revanche, lors de la situation 2, la poutre est très déformée donc l'énergie potentielle est strictement non nulle. À $t = 0,9$s, la courbe de l'énergie potentielle élastique présente un maximum ce qui signifie que la poutre est à son état le plus déformé. On en déduit qu'à $t = 0,9$s, l'athlète se trouve dans la situation 2.

A.5) Lorsque l'athlète est au point le plus haut donc :
- la poutre n'est pas déformée : $E_{pe} = 0$
- l'athlète n'a pas de vitesse : $E_c = 0$

Ces affirmations sont confirmées par le graphique à $t = 2,0$s. Donc, à ce moment-là, $E_m = E_{pp}$. Or, $E_m = 4755$ J et $E_{pp} = mgz_A$. Donc,

$$z_A = \frac{E_m}{mg} = \frac{4775}{79 \times 9.81} \implies z_A = 6,16 \text{ m}$$

B.1) L'athlète s'élance d'une altitude z_A, sans vitesse et n'est soumis à aucune autre force que son propre poids (on néglige l'action de l'air). Il est donc en chute libre.

B.2) Rédaction classique avant l'utilisation d'un théorème de mécanique :
- **Système :** athlète, de masse m
- **Référentiel :** terrestre, supposé galiléen

— **Actions mécaniques extérieures :** $m\vec{g} = -mg\vec{z}$

Méthode 1 : application du théorème de l'énergie cinétique entre les instants où $z = z_A$ et $z = z_B$. La variation de l'énergie cinétique est égale au travail W de toutes les forces :

$$\Delta E_c = W_{z_A \to z_B}(m\vec{g}) \implies E_c(z_B) - E_c(z_A) = -mg\vec{z}\cdot\overrightarrow{AB} \implies \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = -mg\times\vec{z}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}) = -mg\times\vec{z}\cdot\overrightarrow{AO}$$

Or, $\vec{z}\cdot\overrightarrow{AO} = -(z_A - z_B)$. De plus, $v_A = 0$ m/s (pas de vitesse au point A). D'où

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg(z_A - z_B) \implies v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

Méthode 2 : application du théorème de l'énergie mécanique entre les instants où $z = z_A$ et $z = z_B$. . La variation de l'énergie mécanique est égale au travail W des forces non-conservatives :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \text{seul le poids s'applique, et il est conservatif}$$

On a donc

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \implies \frac{1}{2}mv_B^2 = mg(z_A - z_B) \implies v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

B.3) *Application numérique :* $g = 9{,}81$ N/kg et $z_A - z_B = 5{,}31$ m : $v_B = 10{,}2$ m/s

C.1) Rédaction classique avant l'utilisation d'un théorème de mécanique :

— **Système :** athlète, de masse m

— **Référentiel :** terrestre, supposé galiléen

— **Actions mécaniques extérieures :** pesanteur $m\vec{g} = -mg\vec{z}$ et action du matelas $\overrightarrow{F_T} = ||\overrightarrow{F_T}||\vec{z} = F_T\vec{z}$ (verticale vers le haut d'après l'énoncé)

La seconde loi de NEWTON nous donne, lors du contact :

$$m\times\vec{a} = -mg\vec{z} + F_T\vec{z}$$

En projection selon $\vec{z}$, il reste :

$$m\times a_z = -mg + F_T \implies 10mg = -mg + F_T \implies F_T = 11mg$$

Application numérique : $F_T = 11\times 79\times 9{,}81 \implies F_T = 8{,}52$ kN.

C.2) On part de la donnée de l'énoncé $a_z = 10g$ puis on intègre successivement, après l'impact, donc au moment de l'enfoncement de l'athlète :

$$v_z(t) = \int a_z\,\mathrm{d}t = 10gt + \text{constante}$$

À $t = 0$ (contact entre l'athlète et le tapis), la vitesse verticale est $v_z(t=0) = v_{0z}$. Donc,

$$\text{constante} = v_{0z} \qquad \text{et} \qquad v_z(t) = 10gt + v_{0z}$$

On intègre de nouveau, sachant $z(t=0) = z_B$ (l'athlète est sur le tapis) :

$$z(t) = \int v_z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\times 10gt^2 + v_{0z}t + \text{constante} \quad z(t=0) = z_B \implies \text{constante} = z_B$$

Ainsi,

$$v_z(t) = 10gt + v_{0z} \quad \text{et} \quad z(t) = 5gt^2 + v_{0z}t + z_B$$

C.3) À la réception, à t_1, $v_z(t_1) = 0$. Donc,

$$10gt_1 = -v_{0z} \implies t_1 = -\frac{v_{0z}}{10g} = -\frac{-10{,}2}{10\times 9{,}81} = 104 \text{ ms}$$

C.4) À $t_1 = 104$ ms, *i.e.* au moment de la réception, l'athlète va s'enfoncer dans le matelas jusqu'à l'altitude $z(t_1)$. S'il s'enfonce trop, il va toucher le sol et se blesser. Il faut donc que la profondeur d'enfoncement soit inférieure à l'épaisseur du matelas. Cela se matérialise par la condition sur les altitudes : $z_B - z(t_1) < e$ avec $e = 82$ cm l'épaisseur du matelas. Et,

$$z_B - z(t_1) = -5gt_1^2 - v_{0z}t_1 - z_B + z_B = -5gt_1^2 - v_{0z}t_1 = -5\times 9{,}81\times(0{,}104)^2 + 10{,}2\times 0{,}104 = 53 \text{ cm}$$

La profondeur d'enfoncement n'excède pas l'épaisseur du matelas, donc l'athlète ne se blesse.

Des supercondensateurs pour recharger un bus électrique (5 points)

A.1) La convention récepteur est adoptée pour le condensateur donc : $i(t) = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Or, $q(t) = Cu_c(t)$. En injectant cette expression et sachant que C est constant, on obtient :

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t)$$

A.2) La loi des mailles appliquée au circuit donne, dans le sens horaire par exemple :

$$u_c(t) - u_R(t) = 0$$

Pour u_R, on peut appliquer la loi d'OHM : $u_R(t) = R \times i(t)$. Et à la question précédente, on a vu que $i(t) = -C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t)$. Finalement, cela donne :

$$u_c(t) - R \times \left(-C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t)\right) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{u_c(t)}{RC} = 0$$

On peut d'ores et déjà identifier le temps caractéristiques $\tau = RC$.

A.3) Nous avons trouvé qu'u_c était régie par une équation différentielle homogène du premier ordre donc la solution générale est uniquement la solution homogène qui est de la forme :

$$u_c(t) = B \times \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

avec $B \in \mathbb{R}$, une constante à déterminer. Pour déterminer B, il faut utiliser la condition initiale : $u_c(t=0) = E$. Or, à $t = 0$, $u_c(t=0) = B \times \exp(0) = B$. Donc $B = E$ et la solution est donc :

$$u_c(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

Je n'ai, volontairement, pas respecter l'esprit de la question. En effet, l'énoncé propose la forme de la solution (en la complexifiant) et on doit identifier les constantes A et B sur cette forme de solution, sans en proposer une autre. Si on « respecte » l'esprit de l'énoncé :
A et B sont 2 constantes à déterminer. Il nous faut donc 2 indications. L'énoncé nous en donne déjà une : $u_c(t=0) = E$. On peut en déduire une autre grâce l'équation différentielle que l'on évalue en 0 :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t=0) = -\frac{u_c(t=0)}{RC} \implies \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t=0) = -\frac{E}{RC}$$

Or, d'après la forme de solution proposée,

$$u_c(t=0) = A + B \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{B}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \implies \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(t=0) = -\frac{B}{RC}$$

Ainsi, par identification,

$$-\frac{B}{RC} = -\frac{E}{RC} \implies B = E \quad \text{puis} \quad A + B = E \implies A = E - B = E - E = 0$$

Ainsi la solution est :

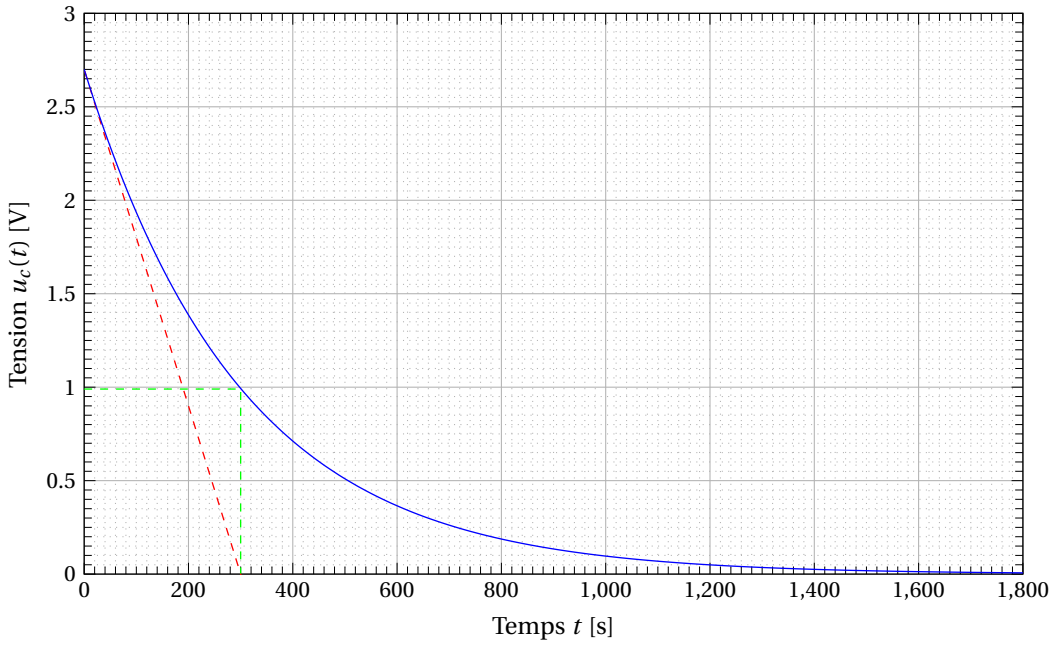
$$u_c(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

A.4) Il y plusieurs méthodes :

— On trace l'équation de la tangente à l'origine, en rouge sur le schéma. Elle intersecte l'axe des abscisses en $t = \tau$. On trouve $\tau = 300$s (à adapter selon la lecture graphique).

— On utilise la méthode des $\tau, 3\tau, 5\tau$, en vert sur le schéma. Exemple avec τ. En $t = \tau$, on a $u_c(t=\tau) = E \times e^{-\frac{\tau}{\tau}} = e^{-1} \times E \simeq 0,36E \simeq 0,99$V. Il nous reste à trouver le temps qui correspond à $u_c = 0,99$V. Ce temps sera τ. On trouve $\tau = 300$s (à adapter selon la lecture graphique).

FIGURE 5 – Évolution de u_c lors de la décharge



A.5) On a $\tau = RC$ avec $\tau = 300$s et $R = 100$ mΩ. Donc $C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{300}{100 \times 10^{-3}} = 3000$ F (on trouve une valeur différente selon la valeur de τ déterminée graphiquement).

A.6) Application directe de la formule d'incertitude :

$$u(C) = 3000 \times \sqrt{\left(\frac{25}{300}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^2} = 257 \text{ F}$$

Ainsi, la valeur de C est 3000 ± 257 F $\iff C \in [2743;3257]$ F (intervalle à ajuster selon nos valeurs). La valeur $C_{ref} = 3000$ F se situe bien dans cet intervalle.

B.1) Dans cette question, on cherche une relation directe entre $i(t)$ et $u_c(t)$. On reprend la loi des mailles précédemment établie

$$u_R(t) = u_C(t) \implies i(t) = \frac{1}{R} u_C(t)$$

Donc,

$$I_{max} = \frac{1}{R} u_{C,max} = \frac{E_{totem}}{R}$$

car $\max\limits_{t \geq 0}\{u_c(t)\} = u_c(0) = E_{totem}$. Ainsi, $I_{max} = \dfrac{760}{10^{-1}} = 7600$ A. C'est une valeur énorme en comparaison aux valeurs habituellement utilisées qui sont de l'ordre de l'ampère.

B.2) La relation reliant puissance P, énergie W et t est :

$$W = P \times t \qquad \text{avec} \qquad P = 9,0 \text{ kW}$$

Ainsi,

$$t = \frac{W}{P} = \frac{C_{totem} u_c^2}{2P} = \frac{C_{totem} E_{totem}^2}{2P}$$

Application numérique : $t = \dfrac{20 \times 760^2}{2 \times 9000} = 642$ s $= 10$ min 41 s. Cette valeur ne semble pas démesurée, c'est tout à faire acceptable et réaliste pour un temps de charge.

Une exoplanète : 51PEG_B

A.1) On mesure 9 périodes en 38 jours : $9T = 38$ jours $\iff T = 38/9 = 4,2$ jours. L'intérêt de mesurer graphiquement 9 périodes plutôt qu'une est de diminuer l'incertitude sur notre mesure.

A.2) On réalise une analyse dimensionnelle. Déjà, $\left[\dfrac{T^2}{r^3}\right] = \mathrm{T}^2 \cdot \mathrm{L}^{-3}$. Pour chaque expression :

— $\left[\dfrac{4\pi^2}{GM_{51}}\right] = \left[\dfrac{1}{GM_{51}}\right] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}^2\mathrm{M}^1 \times \mathrm{M}^{-1} = \mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-3}$

— $\left[\dfrac{GM_{51}}{4\pi^2}\right] = [GM_{51}] = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{M} = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$

— $\left[\dfrac{4\pi^2}{GM_{soleil}}\right] = \left[\dfrac{1}{GM_{soleil}}\right] = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}^2\mathrm{M}^1 \times \mathrm{M}^{-1} = \mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-3}$

— $\left[\dfrac{4\pi^2 G}{M_{51}}\right] = \left[\dfrac{G}{M_{51}}\right] = \mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}\mathrm{M}^{-1} \times \mathrm{M}^{-1} = \mathrm{T}^{-2}\mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-2}$

Seules 2 expressions sont potentiellement correctes :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{51}} \qquad \text{et} \qquad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{soleil}}$$

On étudie l'exoplanète 51Peg_b qui gravite autour d'une étoile 51Peg_a. La force gravitationnelle qui s'exerce entre les 1 éléments est :

$$\vec{F}_{a\to b} = -G\frac{M_{51Peg_b}M_{51Peg_a}}{r^2}\vec{u}_{a\to b}$$

La seconde loi de NEWTON appliquée à l'exoplanète donnera 51Peg_b :

$$M_{51Peg_b} \times \vec{a} = -G\frac{M_{51Peg_b}M_{51Peg_a}}{r^2}\vec{u}_{a\to b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = -G\frac{M_{51Peg_a}}{r^2}\vec{u}_{a\to b}$$

Donc, seule la masse de l'étoile 51Peg_a, M_{51Peg_a}, interviendra. Si on avait voulu arrêter le raisonnement plus tôt, on aurait pu dire qu'il n'y avait strictement aucune raison que la masse du soleil intervienne dans le problème, pas plus que la masse de la Terre ou encore celle d'un canapé. Donc l'expression correcte à retenir :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{51Peg_a}}$$

A.3) On isole la distance r dans l'expression précédente :

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_{51Peg_a}}{4\pi^2}}$$

Application numérique : avec $T = 4,2 \times 24 \times 60 \times 60 = 362880$ s,

$$r = \sqrt[3]{\frac{362880^2 \times 6,6742 \times 10^{-11} \times 1,89 \times 10^{30}}{4\pi^2}} = 7,49 \times 10^6 \text{ km}$$

A.4) La question est vague. On peut utiliser la loi de KEPLER pour comparer des caractéristiques telles que la période ou la distance étoile-planète. Chacun des systèmes vérifie donc la loi :

$$\frac{T_{51b}^2}{r_{51b}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{51a}} \quad \text{et} \quad \frac{T_{Me}^2}{r_{Me}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Soleil}} \Longrightarrow \frac{4\pi^2}{G} = M_{soleil}\frac{T_{Me}^2}{r_{Me}^3} = M_{51a}\frac{T_{51b}^2}{r_{51b}^3}$$

On peut donc vérifier que ces valeurs sont bien égales pour les 2 systèmes :

$$M_{soleil}\frac{T_{Me}^2}{r_{Me}^3} = \frac{1,989 \times 10^{30} \times 88^2}{(5,8 \times 10^7)^3} = 7,90 \times 10^{30}\text{kg}\cdot\text{j}^2\cdot\text{km}^{-3} \quad \text{et} \quad M_{51a}\frac{T_{51b}^2}{r_{51b}^3} = \frac{1,89 \times 10^{30} \times 4,2^2}{(7,5 \times 10^6)^3} = 7,90 \times 10^{30}\text{kg}\cdot\text{j}^2\cdot\text{km}^{-3}$$

Les quotients sont donc bien égaux et la loi de KEPLER est vérifiée. En terme de caractéristiques,

— $\dfrac{r_{Me}}{r_{51b}} = \dfrac{58}{7,5} \simeq 7,7$
— $\dfrac{T_{Me}}{T_{51b}} = \dfrac{88}{4,2} \simeq 21$

Bien que la distance étoile-planète de Mercure ne soit seulement que 7,7 fois plus grande que celle de 51PEG_b, sa période de révolution l'est 21 fois.

B.1) Dans le triange BA-oeil rectangle en A,

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{AB}{D}$$

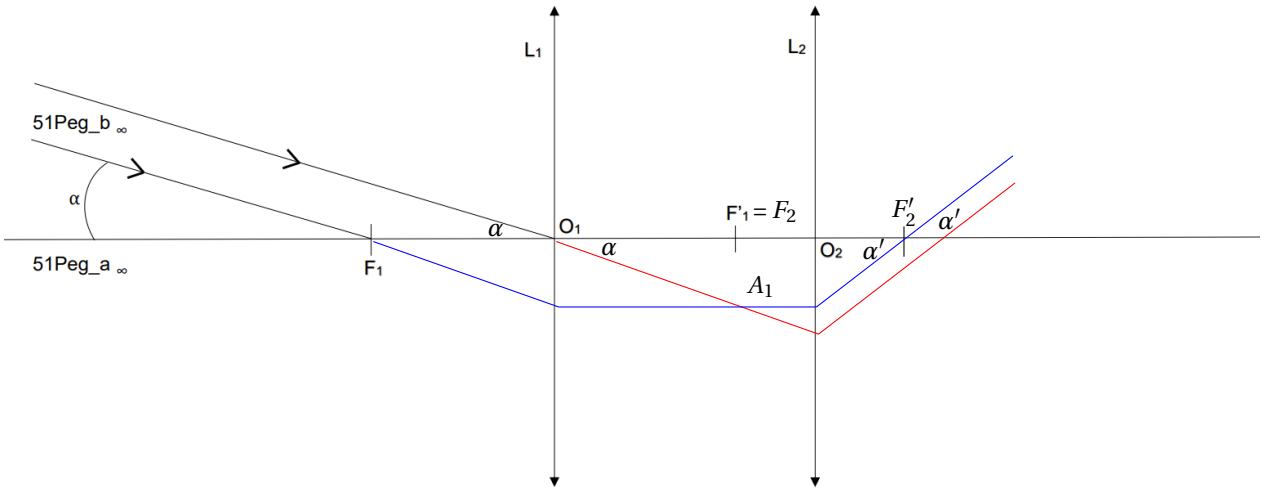
Or, AB représente la distance séparant 51PEG_a de 51PEG_b : $AB = r = 7,5 \times 10^6$ km. D représente la distance entre l'observateur situé sur Terre et la planète 51PEG_b : $D = D_{Terre-51Peg_a} = 4,53 \times 10^{14}$ km. L'approximation des petits angles donne :

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{r}{D_{Terre-51Peg_a}} = \frac{7,5 \times 10^6}{4,53 \times 10^{14}} = 1,7 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

La condition pour pouvoir distinguer l'étoile de l'exoplanète est $\alpha > \varepsilon = 3,0 \times 10^{-4}$ rad. Elle n'est pas respectée ici. Donc, un observateur situé sur Terre ne verra, à l'œil nu, qu'une seule et même tâche pour 51PEG_a et 51PEG_b.

B.2) Par construction d'une lunette astronomique, les foyers image de L_1 (objectif) et objet de L_2 (oculaire) sont confondus : $F'_1 = F_2$. On peut donc tracer les rayons lumineux avec les règles suivantes :
— le rayon qui passe par F_1 sort parallèle à l'axe optique
— le rayon qui passe par le centre optique n'est pas dévié
— le rayon qui arrive parallèle à l'axe optique passe par F'_2

FIGURE 6 – Trajets lumineux au travers de la lunette astronomique



Ce système est afocal : l'image d'un objet situé à l'infini, est située à l'infini.

B.3) Par définition le grossissement est $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$. On peut exprimer ces angles en fonction des longueurs du schéma :

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{F'_1A_1}{O_1F'_1} = \frac{F'_1A_1}{f'_1} \qquad \alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{F'_1A_1}{O_2F'_2} = \frac{F'_1A_1}{f'_2}$$

Ainsi,

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\dfrac{F'_1A_1}{f'_2}}{\dfrac{F'_1A_1}{f'_1}} = \frac{f'_1}{f'_2}$$

B.4) Sans lunette optique, l'angle que l'on perçoit entre les 2 objets est $\alpha = \dfrac{r}{D_{Terre-51Peg_a}}$. Cet angle est trop faible pour qu'on puisse distinguer les 2 objets : $\alpha < \varepsilon = 3,0 \times 10^{-4}$ rad qui représente le pouvoir résoluteur de l'oeil. On utilise donc une lunette optique pour « agrandir » cet angle. Avec la lunette optique, l'angle perçu est α' (on met notre oeil côté oculaire). On a donc :

$$\alpha' = G\alpha = \frac{f_1'}{f_2'} \times \frac{r}{D_{Terre-51Peg_a}}$$

On cherche donc, grâce à la lunette optique, à avoir $\alpha' > \varepsilon$. On veut donc

$$\frac{f_1'}{f_2'} \times \frac{r}{D_{Terre-51Peg_a}} > \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{r f_1'}{\varepsilon D_{Terre-51Peg_a}} > f_2' \quad \Longrightarrow \quad f_2' < \frac{r f_1'}{\varepsilon D_{Terre-51Peg_a}}$$

Application numérique : $\dfrac{r f_1'}{\varepsilon D_{Terre-51Peg_a}} = \dfrac{7,5 \times 10^6 \times 900 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-4} \times 4,53 \times 10^{14}} = 5,0 \times 10^{-2}$ mm. On doit donc avoir $f_2' < 5,0 \times 10^{-2}$ mm. Or, on ne dispose que de lentilles avec de focales de 6, 10 et 20 mm. Avec le matériel disponible, on ne pourrait donc pas distinguer l'exoplanète de son étoile.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.